开平方和开立方的简易速算

一、开平方的速算

大陆刊物 轉 載

(一)简位折半开平方

1. 九九平方表和九九半平方表

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N^2	01	04	09	16	25	36	49	64	81
$\frac{N^2}{2}$	005	02	045	08	125	18	245	32	405

表中平方数，表示把1～9各数分别予以平方后的数，以二位数表示，无十位的补0占位。九九半平方数，表示经过平方取其二分之一后的得数。第一位数码表示十位数字，其后依次为个位数字和十分位数字，在十位或个位无数的都补0占位。

2. 分节布数

把被开方数，从小数点起整数位向左小数向右每二位分为一节，最左(右)一节若只有一位，分别补0凑为一节。把被开方数在节前空一档布入算盘内(不布也可以，心里想着被开方数是从盘左第二档布起的)。实际运算中被开方数并不入盘，只是印象中各位数字都各据一档罢了(小数点为准，左右两边分，二位为一节，一节一位根)。

3. 截尾简位

简位是把被开方数从左到右截取比根多一位的数(以下四舍五入)，个别的要多二位，判别的方法，是在估次根时，根如为四位数，次根应得百位数，根为三位数次根应得十位数，……如估出根的数位小于应得的数位，就将被开方数(简称实)增加一位来调整，使估得的数位与应得的数位相符。

4. 运算

(1)观察得出首节中所含最大整数平方根作为首根，隔档或挨档上商，并从首节中减去首根的平方，用0.5乘余数。(2)用首根试除余数，从小取次根，观察够减下数时，在余数中将次根和首根的积与次根的平方半的和减去(即减去$ab+\frac{b^2}{2}$)，减数一般可用一口清法读出(首、次根的积的个位即是次根平方半数的十位)，照"商除置商"的法则拨入根数，与商除法一样边算边减，减后得到一个新余数。(3)求三根。把首、次根合起来看成首根数，用来试除新的余数，得第三位根。以下照此同样方法，继续计算下去，直到开尽或达到需要的精确度为止。(4)末位根以下是否取，只要比较一下差余数与已得根数就行，大于根数1/2就入，小于根数1/2就舍。

例1. $\sqrt{42'10'.71'11}=64.89$

说明	盘式 1	2	3	4	5	6	
1. 截尾：原被开方数为四节数(整数、小数各二位)，要求得四位根，可截取五位进行开方		4	2'	1	0'	7	
2. 首根：首节42，得首根6，减6^2余6107用0.5乘余数，一口读出它的1/2是30535	六		3	0	5	3	5
3. 次根：30÷6得4，因4×6(24)和次根4的平方半(即08)错(开一)位相加为248，余数减去248，在3所在档前拨入次根4，得到64‸5735，首、次根是64.5735是新余数	六	四		5	7	3	5

续表

说明	盘式						
	1	2	3	4	5	6	
4. 三根：573÷64 得 8，改减 8、5152（8×64 错开一位加入 $\frac{8^2}{2}$），减后余 583，得前三位根为 648。	六	四	八		5	8	3
5. 四根：583÷648 得 9，改减 9、583（9×648 错位加入 $\frac{9^2}{2}$）减后无余，盘上数 6489 即平方根为 64.89（在求得前三位根后看余数 583 大于前三位根 648 一半，即决定三根为 9）	六	四	八	九			

例 2. $\sqrt{384.736449}\approx 19.61$（不尽根求小数二位）共五位根（整数根二位，小数根三位）

说明	盘式							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. 原式截取 0 384.736			3'	8	4'	7	3'	6
2. 首根：首节 03 得首根 1，拨于盘左 1 档（或迳行抄数），减去 1，余 284 736，乘以 0.5，一口读出它的1/2是 142 368	一		1	4	2	3	6	8
3. 次根：14÷1 得 9，余数 142 368 首左减去1305，（1×90＋40.5）新余数为 11 868，首根 1 后拨入次根 9，得到 $19_{\triangle}11\ 868$	一	九		1	1	8	6	8
4. 三根：118÷19 除得 6，改减 6.1158（6×19 错开一位加入 $\frac{6^2}{2}$），减后余 288	一	九	六			2	8	8

续表

说明	盘式								
	1	2	3	4	5	6	7	8	
5. 四根：288÷196 得 1，改减 1.196（1×196 错开一位加入 $\frac{1^2}{2}$），余 92，小于前四位根 1961 的一半，舍。	一	九	六	一			9	2	（舍）
6. 得根 19.61（如从首、次节 384 中一次取首次根 19，可省大量运算）									

（二）心算开平方

（1）如果算题已说明根是能开尽的二位数可直观心算出二位根。

上面已列出了平方九九口诀，可观察到一数的平方数规律：即一和九、二和八、三和七、四和六这四对互补数（两数合成 10），它们的平方数的末位相同。一和九都是 1，二和八都是 4，三和七都是 9，四和六都是 6。此外五和它的平方数的末位数相同（5）。

心算开平方法　1. 先将某平方数（即被开方数）的后二位划为一节，看前节数中所含最大整数平方根作为首根。2. 前节数经减去首根平方数后，余数如小于首根时，根据后节末位数的对应规律取较小的（因对应数有大小两个）一数为次根，如果余数（前节）等于或大于首根，则取较大的对应数为次根。

例 1. $\sqrt{88'36}=94$ 因被开方数首节 88 所含最大整数平方根为 9（首根），88－81＝7（首节余数），而 7＜9，所以后节末位 6，应取较小的 4（比 6 小）为对应的次根。反之如被开方数为 92'16，因被开方数首节减 9 的平方数 81，余数 11，而 9＜11，所以后节末位 6 应取较大的 6（比 4 大）为对应的次根。

例 2. $\sqrt{44'89}=67$ 因被开方数首节 44 所含最大整数平方根为 6（首根），44－36＝8（首节余数），而 6＜8，所以后节末位 9 应取较

大的 7(比 3 大)为对应的次根。反之如被开方数为 39'69,因被开方数首节 39 减 6 的平方数 36 后,余数 3(首节),而 6>3,所以后节末位 9 应取较小的 3(比 7 小)为对应的次根。

例 3. $\sqrt{72'25}=85$ 因被开方数首节 72 所含最大整数平方根为 8(首根),72－64＝8(首节余数)(此步实际运算时可省),后节末位为 5,所以断定次根为 5。

(2)算题是能开尽的三位数、四位数、五位数……

1. 求首根的办法照以上算法,将首节的余数接加第二节数为第一余数。2. 把首根用心算翻倍,再用试确商的办法,看余数内含次根几,就将次根接加在首根翻倍数后位再乘以次根数,将乘积数从第一余数减去。第二节上的余数如小于首、次根,就根据末节末位数取较小的对应数为三根(对首、次根合起来说为次根)。余数如大于首、次根,就取较大的对应数为三根。如后节末位数为 5 时,只要估出次根就可迳取 5 为三根。

例 1. $\sqrt{14'74'56}=384$ 1. 被开方数首节 14 含最大整数平方根 3,即为首根 3,14－9＝5,首、次节余数 574。 2. 首根 3 翻倍为 6,试除余数得次根 8,574－68×8＝574－544＝30。3. 次节余数 30<38(首、次根),可以断定末位为 4(4<6)。反之,如被开方数为:14'89'96,因被开方数减去首、次根的平方数后,余数为 4596,次节上余数 45 大于首、次根 38,就取较大(6>4)的对应数 6 为三根,即三位根为 384。

例 2. $\sqrt{78'32'25}=885$ 被开方数得首根 8,经在首节减去 8 的平方数 64 后,第一、二节余数为 1432,将首根 8 翻倍后为 16,试除余数 1432 得次根 8,1432－168×8＝1432－1344＝88,因末节末位数为 5,即迳取三根为 5,得三位根为 885。(实际上试得次根为 8 后,乘减这一步计算可省)。

例 3. $\sqrt{5'33'14'81}=2309$ 被开方数首节 5 可得首根 2,5－4,第一、二节余数为 133,将首根 2 翻倍后为 04,试除余数首、次两位 13 得次根 3, 133－43×3＝133－129＝4,接加第三、四节 1481,新余数为 41481,余数前二位大于首、次根,决定三、四根为 09(取末位 1 的较大对应数 9,因 9>1),这里必须注意被开方数余数 41481 与次根之间隔有两个 0,所以三根应为 0, 9 才是四根。四位根为 2309。

例 4. $\sqrt{2'84'76'.56'25}=168.75$ 被开方数首、次节 284 可得最大平方根 16,284－256(16^2)＝28,接加第三节 76,次、三节余数 2876,将首、次根 16 翻倍为 32,试除余数 288,得三根(从小)8,2876－328×8＝2876－2624＝252,余 252 接加第四节小数 56,新余数为 25256,前三根 168 翻倍为 336,以首二位 34 试除,得四根 7,25256－23569＝1687 (3367×7＝23569)。根据第五节末位数 5,可决定五根为 5。实际估得四根 7 后的运算也可省略,迳抄答数五位根 168.75。

思考与练习

1. 求下列各题平方根

(1) $\sqrt{1444}$	(2) $\sqrt{8836}$	(3) $\sqrt{4489}$	(4) $\sqrt{3249}$
(5) $\sqrt{2304}$	(6) $\sqrt{676}$	(7) $\sqrt{841}$	(8) $\sqrt{3969}$
(9) $\sqrt{8649}$	(10) $\sqrt{5776}$	(11) $\sqrt{762129}$	(12) $\sqrt{61.7796}$
(13) $\sqrt{3294.76}$	(14) $\sqrt{795.24}$	(15) $\sqrt{94.6729}$	(16) $\sqrt{571536}$
(17) $\sqrt{20.8849}$	(18) $\sqrt{44.3556}$	(19) $\sqrt{58.8289}$	(20) $\sqrt{597529}$

2. 下列各题不尽根,求小数二位(第三位四舍五入)

(1) $\sqrt{764.684}$	(2) $\sqrt{954.376}$	(3) $\sqrt{6234.572}$	(4) $\sqrt{168.87}$
(5) $\sqrt{39.2718}$	(6) $\sqrt{15}$	(7) $\sqrt{5}$	(8) $\sqrt{13}$
(9) $\sqrt{1856.2437}$	(10) $\sqrt{0.11}$		

二、开立方的速算

(一)简位三一开立方

1. 九九立方表和九九平方三一表

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N^3	01	08	27	64	$\overset{\frown}{12}5$	$\overset{\frown}{21}6$	$\overset{\frown}{34}3$	$\overset{\frown}{51}2$	$\overset{\frown}{72}9$
$\frac{N^2}{3}$	$00\dot{3}$	$01\dot{3}$	03	$05\dot{3}$	$08\dot{3}$	12	$16\dot{3}$	$21\dot{3}$	27

表的说明:1. 表中第一行数字分别代表把 1～9 各数予以立方;平方三一表分别代表把 1～9 各数予以平方,再取其 1/3。2. 各阿拉伯数字(第二、三行)分别代表 1～9 各数经过立方或经过平方取其 1/3 后的得数,第一个数码表示十位数字,其后依次为个位、十分位……数字。十位、个位无数的都补 0;有百位数字时,在百位、十位两数字上面划一弧形线,可把这两字联读在一起,表示十位数字是两位数。末一位阿拉伯数字上有一小圆点的,表示这数是循环数,在算盘上可连拨二、三个相同数以显示出来。

2. 截尾简位

简位的方法和开平方一样,即把被开立方数从左到右截取比要求的根数多二位的数(以下四舍五入)。

3. 分节布数

把被开方数,从小数点起整数位向左,小数位向右每三位分为一节,最左(右)一节如只有一位分别补 0 凑为一节。把被开方数在首节前空开一档布入算盘内。(小数点为准,左右两边分,三位为一节,一节一位根)。

4. 运算

(1) 根据首节数中所含最大整数立方根作为首根,拨于盘左第一档,减去首根的立方数;(2)把余数除以 3 作为新余数;(3)盘右端适当档位上拨入首根的平方,用以试除余数,得出次根;(4)在盘右首根平方数上连加次根与首根的积及次根的平方三一得出一列数;(5)将次根拨入盘左第二档,减去次根与盘右端一列数的积,得新余数;(6)把已得的根看成首根,用同法续求三根(次一位根)。

例 1. $\sqrt[3]{474\ 552}=78$ 原题经简位为 $\sqrt{474'6}$运算

说明	盘式 1	2	3	4	5
1. 首根 7:首节 474 含最大整数立方根 7,474－343＝131	七	4	$\dot{7}$	4	6
2. 1 316÷3＝4 38$\dot{6}$,4 38$\dot{6}$÷49＝8,	七	1	3	1	6
A^{22} 49; A×B 56; $\frac{B^2}{3}$ 21$\dot{3}$ }54813×8	七	4	3	8	6
3. 次根 8:4 38$\dot{6}$－4 385 开尽(尾差因简位舍入引起略去)	七	八			

例 2. $\sqrt[3]{104'487'111}=471$ 被 开方数可简为 $\sqrt[3]{10449}$

说明	盘式 1	2	3	4	5	6	7	8 ▼压尾档
1. 分节:原被开方数可分三节,定位:整数根三位,简为 5 位(比根数多二位)			1	0	4	4	9	
2. 首根 4:首节 104 含最大立方根 4,104－64＝40,接加 49,新余数为 4049	四			4	0	4	9	
3. 4 049÷3＝13 49$\dot{6}$,13 496÷16 取 7(从小)			1	3	4	9	6	
4. 次根 7: a^2 16; a×b 28; $\frac{b2}{3}$ 16$\dot{3}$ } 18 96$\dot{3}$ ×7＝13 274	四	七			2	2	2	

续表

说明	盘式 1	2	3	4	5	6	7	8 ▼压尾档
5. 三根 1：13496－13274＝222，$222\div47^2$ 取三根 1 222－221＝1(实际运算略去这步计算)得三位根 471	四	七	一				1	

例 3. $\sqrt[3]{321'982'523'900}=6854$(不尽根取有效数四位)

说明	盘式 1	2	3	4	5	6	7	8
1. 被开方数分为四节数，有四位整数根简位为 321983，而入盘前空二档			3	2	1	9	8	3
2. 首根 6：首节含最大立方根 6，321－216＝105	六		1	0	5	9	8	3
3. 次根 8：105 983÷3＝353 27$\dot{6}$(新余数)	六		3	5	3	2	7	$\dot{6}$
4. 353 ÷ 36 (B^2)) 取 8 (从 小) $\left.\begin{array}{ll} a^2 & 36 \\ a\times b & 48 \\ \frac{b^2}{2} & 21\dot{3} \end{array}\right\}41\ 01\dot{3}\times8$ 353 276－328 10$\dot{6}$余 2 517÷46 (68) 取 5，	六	八			2	5	1	7
5. 三根 5 $\left.\begin{array}{l} 4624 \\ 340 \\ 8\dot{3} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4\ 658\ 08\dot{3}\times5= \\ 23\ 290\ 4\ddot{1}6 \end{array}$ 2517－2329 余 188	六	八	五			1	8	8
6. 四根 4：188÷46(92)取 4，因要求取四位根，以下计算略，盘面余 12 还原为 36 余 36	六	八	五	四				

例 4. $\sqrt[3]{0.002734896}=0.1398$(答数求到小数 4 位)

说明	盘式 1	2	3	4	5	6	7	8	9 ▼压尾档
1. 被开方数为纯小数为 3 节小数开四位小数根原数可简位为 0.002735计算					2	7	3	5	
2. 首根 1：首节含最大立方根 1，2－1＝1 接加次节，余 1735	一				1	7	3	5	
3. 次根 3，1735÷3＝5 78$\dot{3}$(新余数)5 78$\dot{3}$÷1(A^2)取 3(从小) $\left.\begin{array}{ll} a^2 & 1 \\ ab & 03 \\ \frac{b^2}{3} & 3 \end{array}\right\}133\times3$	一	三			5	7	8	$\dot{3}$	
4. 三根 9：5 78$\dot{3}$－399 余 1 793÷169 取 9 $\left.\begin{array}{ll} a^2 & 169 \\ ab & 117 \\ \frac{b^2}{3} & 27 \end{array}\right\}\begin{array}{l} 18\ 097\times9= \\ 1\ 629, \end{array}$ 1 793－1 629 余 165	一	三	九			1	6	5	
5. 四根 8：165 ÷ 196 取 8， $\left.\begin{array}{ll} a & 1932 \\ ab & 1112 \\ \frac{b^2}{3} & 213 \end{array}\right\}194\times8$ 165 155 余 10 舍，得四位根 0.1398	一	三	九	八			1	0	舍

例 4 第 3 步从小取 3 为次根不易估准，同时第 5 步 139 平方根算较难，可将三根四舍五入处作为 14 算。答数要求保留四个有效数，只要四根取 8 或 9，前者 a^2b 是 155.4，后者是 175，各与余数 165 比，

前者接近余数，决定四根为 8。

开立方时的首根如为 1，估次根较难，最好能掌握 11～19 的立方数，用以一次合并求得首、次根，就比较方便了。

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N^3	1 331	1 728	2 197	2 744	3 375	4 096	4 913	5 832	6 859

（二）心算开立方

如果算题说明根是能开尽的二位、三位、四位……根。

（1）直观心算出二位根

一数的立方数规律：由九九立方表，可知 1、4、5、6、9 各数和它的立方数的末位数相同。2、3、7、8 各数和它的立方数的末位数互补（两数合 10）。

开立方方法：（甲）先将某立方数按三位分节整数自小数点向左，小数自小数点向右。根据第二节的末位数的对应规律，决定立方根的末位根。（乙）再看首节数中含最大整数立方根作为首根。

例 1. $\sqrt[3]{262'144}=64$

被开方数第二节的末位数为 4，所以次根是 4；首节 262 所含最大立方根数为 6，首根是 6，整个二位立方根是 64。

（2）心算出三位根、四位根、五位根

三位根能开尽的被开立方数必可分为三节。因被开立方数数位较多，可先简位，截去尾数。（甲）首节决定首根，心算出被开立方数减去首根的立方数后的余数（连同次节数）。（乙）首根平方三倍，试除余数得次根，取较小值（够减以下各数）。（丙）根据未简位前被开方数的末位数的对应规律取立方根的末位根（省却大量运算）。

例 2. $\sqrt[3]{102'503'232}=468$，原题简位 102'50（甲）首节 102 应用立方口诀得首根 4（64＜102＜125），102－64 余 38，接加次节 50，新余数为 3850。（乙）以首根平方三倍 48 试除余数 385，从小取次根 6。（丙）根据第三节（未简位前）末位数 2 的对应规律得三根为 8（因已知三根 8，所以次根不估 7 而取 6，这点应特别注意，省却大量运算）。整个三位根为 468。

例 3. $\sqrt[3]{273233108169}=6489$ 原题简位 273'233（甲）首节得首根 6（216＜273＜343），273－266 余 57 接加次节 233，余数为 57233。（乙）以 $6^2\times3=108$ 试除余数得次根 4（从小）；再以 $108\times4+6\times3\times4\times4+4\times4\times4$ 分别错开一位相加：$\begin{array}{l}432\\\ 288\\\ \ \ 64\end{array}\rightarrow46\ 144$，57 233－46 144 余 11 089。（丙）以 123（$64^2\times3$ 简位）试除 11089 得三根 8（因已知末根为 9，从小取 8）。（丁）根据第四节的末位数的对应规律得末位根为 9，整个四位根为 6489。

思 考 与 练 习

1. 求下列各题立方根

(1) $\sqrt[3]{0.014706125}$ (2) $\sqrt[3]{0.000003422470843}$（开出四位有效数）

(3) $\sqrt[3]{154854153000}$ (4) $\sqrt[3]{252435968}$

(5) $\sqrt[3]{215784071992}$ (6) $\sqrt[3]{876467493}$

(7) $\sqrt[3]{1481544}$ (8) $\sqrt[3]{0.009063964125}$

(9) $\sqrt[3]{1953125}$ (10) $\sqrt[3]{2460375}$

2. 下列各题不尽根，求出四位有效数

(1) $\sqrt[3]{840.8964}$ (2) $\sqrt[3]{94.823}$

(3) $\sqrt[3]{1.021}$ (4) $\sqrt[3]{1.057}$