速算式的开方心算法

大陆刊物转载

第1节　开平方心算法

速算式的开平方心算法较多，这里主要介绍增乘开平方法、二倍开平方法。

一、增乘开平方法

增乘开平方法是根据公式$(a+b)^2-a^2=2ab+b^2$的原理进行计算的。其心算要领是：

（1）分节：方法参见第1篇第5章第1节笔算式的开平方法。

（2）求首根：按平方九九求出首根a，得根后立即写下来，并于第一节中减去首根a的平方数。

（3）求次根：将首根扩大两倍成2a去除余数$2ab+b^2$，从小立商（根），便可求得次根b，得根后立即写下来，并从余数中错位减去2a+b乘以次根b（即减$(2a+b)b=2ab+b^2$）。

（4）求三根、四根……，余类推。

例1　$\sqrt{2,025}=?$

心算过程：

（1）先把被开方数放入脑内。

（2）求首根：按平方九九求出首根4，写4，减去$4^2=16$，记425。

（3）求次根：将首根4扩大2倍成8去除余数425（末一位截去〈以下同〉）即$42\div8\approx5$，求得次根5，写5，错位减$(2a+b)b$，即：$4\times2\times5$，$5^2=425$。开尽。

心算过程如图10-1所示：

$$
\begin{array}{lll}
 & 20'25 & \cdots\cdots 被开方数 \\
\hline
首根④\cdots\cdots & & \cdots\cdots 按平方九九求得 \\
 & -16\cdots\cdots & \cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} a^2 \\ \downarrow \\ 4^2 \end{array}\right. \\
\hline
 & 4\ \ 25 & \cdots\cdots 余数 \\
次根⑤\cdots\cdots & & \cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} \ \ 2\ \ \ a \\ \ \ \downarrow\ \ \ \downarrow \\ 42\div(2\times4) \end{array}\right. \\
 & -4\ \ 0\cdots & \cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} 2\ \ a\ \ b \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ 2\times4\times5 \end{array}\right. \\
 & -25 & \cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} b^2 \\ \downarrow \\ 5^2 \end{array}\right. \\
\hline
 & 0 & \cdots\cdots 开尽
\end{array}
$$

图　10-1

例2　$\sqrt{65,536}=?$

心算过程：

（1）先把被开方数放入脑内。

（2）求首根：按平方九九求出首根2，写2，减去$2^2=4$，记余25,536。

（3）求次根：将首根2扩大2倍成4去除被开的一节余数255（末一位截去）即$25\div4$，按从小立商的原则求得次根为5，写5，错位减去(2a+b)c，即$2\times2\times5$，5^2，记余3,036。

（4）求三根：用2a+b+b去除余数303求得三根为6，写6，错位减去$[(2a+b+b)b+c^2]$，即50×6，$6^2=3,036$。开尽。

心算过程如图10-2所示：

6' 5 5' 3 6……被开方数

首根②……按平方九九求得

-4 …… $\left\{\begin{array}{l} a^2 \\ \downarrow \\ 2^2 \end{array}\right.$

2 5 5 3 6……余数

次根⑤…… $\left\{25 \div \left(\begin{array}{cc} 2 & a \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 \times & 2 \end{array}\right)\right.$

$-2\ 0$ …… $\left\{\begin{array}{ccc} 2 & a & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2\times & 2\times & 5 \end{array}\right.$

$-2\ 5$ …… $\left\{\begin{array}{l} b^2 \\ \downarrow \\ 5^2 \end{array}\right.$

3 0 3 6……余数

三根⑥…… $\left\{30 \div \left(\begin{array}{ccc} 2a+ & b+ & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 40+ & 5+ & 5 \end{array}\right)\right.$

$-3\ 0\ 0$ …… $\left\{\begin{array}{cc} (2a+b+b)\times & c \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow \\ (40+5+5)\times & 6 \end{array}\right.$

$-\ 3\ 6$ …… $\left\{\begin{array}{l} c^2 \\ \downarrow \\ 6^2 \end{array}\right.$

0……开尽

图 10-2

例3 $\sqrt{214,369}=?$

心算过程：

（1）先把被开方数放入脑内。

（2）求首根：按平方九九求出首根4，写4，减去$4^2=16$，记余54,369。

（3）求次根：用2a（即$2\times4=8$）去除被开的一节余数54，求得次根为6，写6，错位减去$(2a+b)b$，即$2\times4\times6$，6^2，记余2,769。

（4）求三根：用$2a+b+b$（即$80+6+6=92$）去除余数。276，求得三根为3，写3，错位减去$[(2a+b+b)c+c^2]$，即92×3，$3^2=2,769$。开尽。

心算过程如图10-3所示：

2 1' 4 3' 6 9……被开方数

首根④……按平方九九求得

$-1\ 6$ …… $\left\{\begin{array}{l} a^2 \\ \downarrow \\ 4^2 \end{array}\right.$

5 4 3 6 9……余数

次根⑥…… $\left\{54 \div \left(\begin{array}{cc} 2 & a \\ \downarrow & \downarrow \\ 2\times & 4 \end{array}\right)\right.$

$-4\ 8$ …… $\left\{\begin{array}{ccc} 2 & a & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2\times & 4\times & 6 \end{array}\right.$

$-3\ 6$ …… $\left\{\begin{array}{l} b^2 \\ \downarrow \\ 36 \end{array}\right.$

2 7 6 9……余数

三根③…… $\left\{276 \div \left(\begin{array}{ccc} 2a+ & b+ & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 80+ & 6+ & 6 \end{array}\right)\right.$

$-2\ 7\ 6$ …… $\left\{\begin{array}{cc} (2a+b+b)\times & c \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow \\ (80+6+6)\times & 3 \end{array}\right.$

-9 …… $\left\{\begin{array}{l} c^2 \\ \downarrow \\ 3^2 \end{array}\right.$

0…开尽

图 10-3

三、二倍开平方法

二倍开平方法是根据公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的原理进行计算的。其心算要领是：

（1）分节：如前所述。

（2）求首根：按平方九九求出首根a，得根后立即写下来，

并于第一节中减去首根a的平方数。

（3）求次根：将首根扩大2倍成2a去除余数，求得次根b，得根后立即写下来，并错位减去首根a与次根b的乘积的2倍及次根b的平方数。

（4）求三根、四根……，余类推。

例4 $\sqrt{1,296}=?$

心算过程：

（1）先把被开方数放入脑内。

（2）求首根：按平方九九求出首根3，写3，减去$3^2=9$，记余396。

（3）求次根：用2a（即$2\times3=6$）去除余数39，求得次根为6，写6，错位减去2ab、b^2，即：$2\times3\times6$，$6^2=396$。开尽。

心算过程如图10-4所示：

1 2' 9 6 ……被开方数

首根③……………………按平方九九求得

−9 …………… $\left\{\begin{matrix} a^2 \\ \downarrow \\ 3^2 \end{matrix}\right.$

3 9 6 ……余数

次根⑥……………………… $\left\{39\div\left(\begin{matrix} 2 & & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \times & 3 \end{matrix}\right)\right.$

−3 6 ……… $\left\{\begin{matrix} 2 & & a & & b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \times & 3 & \times & 6 \end{matrix}\right.$

−3 6 …… $\left\{\begin{matrix} b^2 \\ \downarrow \\ 6^2 \end{matrix}\right.$

0 ……开尽

图 10-4

例5 $\sqrt{550,564}=?$

心算过程：

（1）先把被开方数放入脑内。

（2）求首根：按平方九九求出首根7，写7，减去$7^2=49$，记余60,564。

（3）求次根：用2a（即$2\times7=14$）去除被开的一节余数60，求得次根为4，写4，错位减去2ab、b^2，即：$2\times7\times4$，4^2，记余2,964。

（4）求三根：将一、二根扩大2倍成2ab（即$74\times2=148$）去除余数296，求得三根为2，写2，错位减去$(2ab+c)c$，即：$2\times74\times2$，$2^2=2964$。开尽。

心算过程如图10-5所示：

5 5' 0 5' 6 4 ……被开方数

首根⑦……………………按平方九九求得

−4 9 ……………… $\left\{\begin{matrix} a^2 \\ \downarrow \\ 7^2 \end{matrix}\right.$

6 0 5 6 4 ……余数

次根④……………………… $\left\{60\div\left(\begin{matrix} 2 & & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \times & 7 \end{matrix}\right)\right.$

−5 6 ……………… $\left\{\begin{matrix} 2 & & a & \times & b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \times & 7 & \times & 4 \end{matrix}\right.$

−1 6 ……… $\left\{\begin{matrix} b^2 \\ \downarrow \\ 4^2 \end{matrix}\right.$

2 9 6 4 …余数

三根②……………………… $\left\{296\div\left(\begin{matrix} 2 & & a & b \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & \times & 74 & \end{matrix}\right)\right.$

−2 9 6 ……… $\left\{\begin{matrix} 2 & & ab & \times & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \times & 74 & \times & 2 \end{matrix}\right.$

− 4 … $\left\{\begin{matrix} c^2 \\ \downarrow \\ 2^2 \end{matrix}\right.$

0 …开尽

图 10-5

练 习 五 十 八

1\. 用增乘开平方法心算下列各题：

(1) $\sqrt{529}=$	(2) $\sqrt{2,809}$
(3) $\sqrt{5,476}=$	(4) $\sqrt{4,761}=$
(5) $\sqrt{6,724}=$	(6) $\sqrt{524,176}=$
(7) $\sqrt{41,209}=$	(8) $\sqrt{207,936}=$
(9) $\sqrt{34,596}=$	(10) $\sqrt{394,384}$

2\. 用二倍开平方法心算下列各题：

(1) $\sqrt{5,184}=$	(2) $\sqrt{4,096}=$
(3) $\sqrt{8,281}=$	(4) $\sqrt{3,249}=$
(5) $\sqrt{1,849}=$	(6) $\sqrt{720,801}=$
(7) $\sqrt{181,476}=$	(8) $\sqrt{80,656}=$
(9) $\sqrt{11,664}=$	(10) $\sqrt{192,721}$

第 2 节　开立方心算法

速算式的开立方心算法较多，这里主要介绍增乘开立方和特定数开立方法。

一、增乘开立方法

增乘开立方法是根据公式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$的原理进行计算的。其心算要领是：

（1）分节：方法参见第1篇第5章第2节笔算式的开立方法。

（2）求首根：按立方九九求出首根a，得根后立即写下来，并于第一节中减去首根a的立方数。

（3）求次根：用$3a^2$去除余数，从小立商，便可求得次根b，得根后立即写下来，并从余数中错位减去$(3a^2+3ab+b^2)\times b=3a^2b+3ab^2+b^3$。

（4）求三根、四根……，余类推。

例1　$\sqrt[3]{46,656}=?$

心算过程：

（1）先把被开立方数放入脑内。

（2）求首根：按立方九九求出首根3，写3，减去$3^3=27$，记余19,656。

（3）求次根：用$3a^2$（即$3\times3^2=27$）去除余数196，求得次根为6，写6，错位减去$(3a^2+3ab+b^2)\times b$，即：$3\times3^2\times6$，$3\times3\times6^2$，$6^3=19,656$。开尽。

心算过程如图10-6所示：

4　6′　6　5　6……被开立方数

首根③……………………按立方九九求得

$-2\ 7$……………… $\left\{\begin{array}{c} a^3 \\ \downarrow \\ 3^3 \end{array}\right.$

1　9　6　5　6……余数

次根⑥……………………$\left\{196\div\left(\begin{array}{ccc} 3 & & a^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \times & 3^2 \end{array}\right)\right.$

$-1\ 6\ 2$……………… $\left\{\begin{array}{ccccc} 3 & & a^2 & & b \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 3 & \times & 3^2 & \times & 6 \end{array}\right.$

$-3\ 2\ 4$……………… $\left\{\begin{array}{ccccc} 3 & & a & & b^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \times & 3 & \times & 6^2 \end{array}\right.$

$-2\ 1\ 6$……… $\left\{\begin{array}{c} b^3 \\ \downarrow \\ 6^3 \end{array}\right.$

0 ………开尽

图 10-6

例2　$\sqrt[3]{426,957,777}=?$

心算过程：

（1）先把被开立方数放入脑内。

（2）求首根：按立方九九求出首根7，写7，减去$7^3=343$，记余83,957,777。

（3）求次根：用$3a^2$（即$3\times7^2=147$）去除被开一节的余

数839，求得次根为5，写5，错位减去 $(3a^2+3ab+b^2)\times b$，即：$3\times7^2\times5$，$3\times7\times5^2$，5^3，记余5,082,777。

（4）求三根：用 $3(a+b)^2$（即 $3\times(70+5)^2=3\times5,625=16,875$）去除余数50,827，求得三根为3，写3，错位减去 $3(a+b)^2\times c$、$3(a+b)\times c^2$、c^3，即：$3\times(70+5)^2\times3$，$3\times(70+5)\times3^2$，$3^3=5,082,777$。开尽。

心算过程如图10-7所示：

4 2 6' 9 5 7' 7 7 7…被开立方数

首根⑦……………………按立方九九求得

$-3\ 4\ 3$ …………… $\left\{ a^3 \downarrow 7^3 \right.$

8 3 9 5 7 7 7 7…余数

次根⑤…………………… $\left\{ 839\div\left(\begin{array}{cc} 3 & a^2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times 7^2 \end{array}\right)\right.$

$-7\ 3\ 5$ …………… $\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & a^2 & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times 7^2 & \times 5 \end{array}\right.$

$-5\ 2\ 5$ …………… $\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & a & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times 7 & \times 5^2 \end{array}\right.$

$-1\ 2\ 5$ …………… $\left\{ b^3 \downarrow 5^3 \right.$

5 0 8 2 7 7 7…余数

三根③…………………… $\left\{ 50872\div \begin{array}{cc} 3 & (a+b)^2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times(70+5)^2 \end{array}\right.$

$-5\ 0\ 6\ 2\ 5$ ………… $\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & (a+b)^2\times & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times(70+5)^2 & \times 3 \end{array}\right.$

$-2\ 0\ 2\ 5$ ……… $\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & (a+b)\times & c^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \times(70+5) & \times 3^2 \end{array}\right.$

$-2\ 7$ … $\left\{ c^3 \downarrow 3^3 \right.$

0…开尽

图 10-7

二、特定数开立方法

被开立方数在100万以内（包括100万），立方根是二位，且能开尽。这时可根据数与数之间的关系迅速得出次根。

我们先观察1～9的立方数：

$1^3=1$	$2^3=8$
$4^3=64$	$3^3=27$
$5^3=125$	$7^3=343$
$6^3=216$	$8^3=512$
$9^3=729$	

从1～9的立方数中可以清楚地看出某数立方数的规律。即1、4、5、6、9各数和它的立方数的末位数是相同的，2、3、7、8各数和它的立方数的末位数之和恰巧都是10，即两者互补。

因此，当被开立方数在100万以内，立方根是二位，且能开尽的情况下，其心算要领是：

（1）分节：如前所述。

（2）求首根：按立方九九求出首根。

（3）求次根：按末位数的对应规律求出次根。

例3 $\sqrt[3]{15,625}=?$

心算过程：

（1）求首根：按立方九九求出首根2，写2。

（2）求次根：按末位数的对应规律求出次根5，写5。

例4 $\sqrt[3]{103,823}=?$

心算过程：

（1）求首根：按立方九九求出首根4，写4。

（2）求次根：被开立方数的末位数是3，其补数是7，因而次根为7，写7。