

從籌算到珠算的演變——1

國珠聯

一、前言

(一)中華文化博大精深，她吸收了有史以來中華民族之遺寶與精華，溶合了各族之精粹，綿延了五千多年之國粹與文物，而悠然成為世界上第一大民族，與擁有博大精深之歷史文化。在所有文化與國粹中，由於舉國上下在復興文化發揚國粹運動中，已獲有相當之成就，然而唯有中國古代之數學，既未見被復興，反而有被遺棄斷送之傾向，考其因無它；一則崇洋心理之作祟，二則國人對古代數學之未能深入與瞭解。自從清朝末年政治腐敗，民不聊生，受列強之欺凌，與割據之後，遂由自大自滿之民族而變成一切喪失信心，處處崇洋之病態，於是樣樣學西洋，時時赴洋留學，迄止留學歸來，便處處出人頭地，因此固有文化已無由於保持或復興。在崇洋心理與一切學西洋科學之過程中，數學當然也是吸收西洋之數學，然而攤開中國古代數學一看，不難看出中國古代數學中，有許多為現代數學中已有，尤其有不少高深數學仍為西洋數學中所未有，談及此不知是說吾人應驕傲好，還是應傷心落淚好？！因為在我國古代的數學礦山中，還有許許多多至今仍未被挖出的各種珍貴稀有的高貴金屬，但後代數學家；包括所有各級學生仍不知他（她）們所學之數學，它早在古代數學家中已呈列了一、二千年之久。

(二)鈴木功二先生係日本一九六〇年代珠算最高段，其珠算式心算能力之高，也是當代之冠。當時日本全珠連為了推廣珠算教育，特派遺鈴木氏至美國加州執教，鈴木氏在加州憑著其高超之能力，與天生之聰慧，及傳教師之精神，不僅將珠算教育奠定良好之基礎，且已引起美國朝野之重視。今年七月初受加州大學博士班研究生之託，特前來台北東園國小，調查研究“小學生學習過珠算對各學科成績之影響”，以俾提供該研究生作為論文之資料，其結論為學過珠算且已達到相當級位之學生，其學業成績較未學過者，超越數倍以上，而此結果不但已獲得美國官方之證實，同時將來可能做為修正課程之重要參考。

鈴木氏於交談中；提及筆者前在菲講學時；曾教導該地大學數學系學生研究；三角函數珠算解法、聯立方程式珠算解法之實例及成就，希望以此作為今後探索古代數學奧密與藉此提高珠算之身價與地位。

於是乃重新提起擱置許久之筆桿，與荒蕪已久的寫作心思，希望在暑假中略為振作一番，寫一些對復興文化、發揚國粹有益，對振興珠算教育有幫助之劣作，以喚起有心人！對吾中華民族往日之餘輝，能正眼加以重視，進而共同肩負起復興中華、發揚文化之使命，反之絕不可作為中華文化之背叛者。

二、中國古代主要的計算方法——籌算

(一)籌算的沿革

在人類歷史文化進步之過程中，爲了解決其日常生活之需要，各民族都有過其各自不同的計算工具；約四、五千年前巴比倫人（今伊拉克共和國境內），乃以有稜角之木片，在泥板上刻壓出各種有稜角之楔形符號來記數與進行計算的；而古埃及人則用一種象形文字，在尼羅河中所產生之一種水草葉子上，記錄各種數學問題並進行計算的；至於中世紀的印度人與阿拉伯人，則在沙盤裏，或直接在地上，用有尖之小木棍來進行“寫真”的。在本篇所強調的就是“籌算”，就是中國古代所特有之一種計算工具。而籌算的確給中國古代數學帶來了許多漣漪，和燦爛的光輝，但願以此拙文引起各位先進之共鳴！

“籌”就是一些小竹棍（片），古代的人就運用這些小竹片，擺成不同的形式來表示不同的數目，並進行各種計算。以此“籌”來進行之計算，便叫做“籌算”。

（一）籌算之起源

使用“籌”來作計算的方法，究竟是起源於何時？何朝代？何人所創？亦如珠算一般，尤其無從查考。正因竹籌容易腐爛，不能長時間保存，因此現有出土之古器物中，還沒有發現籌算。然而吾人可以深信，籌算已遲在春秋戰國時代，已普遍被熟練地使用着。可從流傳至今的春秋戰國時代的一些書籍中，可以看到“籌”或“”字。如老子書中便有“善計者不用籌策”的話，亦即說會計算的人可以不用籌，用心算便可以算出答案來。

（二）我國十進位制算籌之數字

約四、五十年前，一般商場上交易時，往往使用算籌數字記流水帳，而此種方法與數字相傳已久，惟近三、四十年來，上述流水帳已無人使用，同時算籌數字亦很少人使用了。算籌可分爲縱式與橫式兩種：

阿拉伯數字	1 2 3 4 5 6 7 8 9
縱式數字	Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ Ⅸ
橫式數字	一 二 三 四 五 六 七 八 九

至於十進位之配合則；

個位用縱式，十位用橫式，百位用縱式，千位用橫式，萬位再用縱式，餘此類推；遇到零時，便留個空位。如此順着個、十、百、千、萬、十萬、百萬……的順序，由右向左，數碼縱橫相間，再加空位，就可以表示出任何一個數目。

例如：4,678 可擺成；Ⅳ Ⅰ Ⅶ Ⅷ

30,592 可擺成；Ⅲ Ⅰ Ⅴ Ⅸ Ⅱ

上列記數法，在〔（孫子算經）約公元五世紀〕已有此說明。孫子算經之原文是；“凡算之法，先識其位，一縱十橫，百立千僵（百位是縱式，千位又是橫式），千十相望，萬百相當。”

中國古代，至遲在春秋戰國時代便已經產生了十進制之算籌記數法。因此中國從春秋戰國時代起，各種運算都已演變至簡單而易行之計算。

十進位制算籌記數法是中國古代數學之一項獨特之創舉。迄至十五世紀中葉珠算通

四籌算之加減乘除四則運算

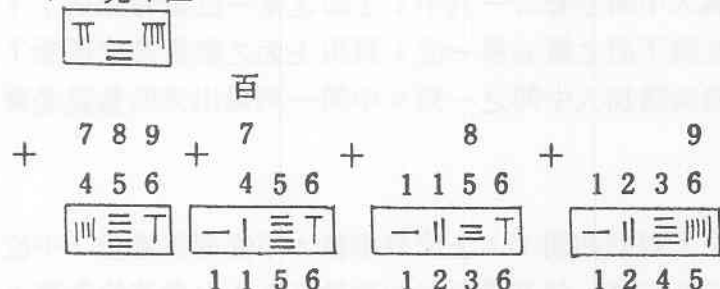
一個農夫一家五口，種田百畝。每年每畝收穫一石又半，共收一百五十石粟。除十分之一繳稅十五石，餘下一百三十五石；食糧每人每月一石又半，五個人一年九十石粟，餘四十五石。每石以三十錢出售，計售得一千三百五十。除宗祠祭祀用錢三百外，餘一千五十。穿衣每人要三百錢，五個人一年一千五百，尚不足四百五十。

根據古算書中關於乘除法連帶牽涉加減法之記載，再對珠算加減法進行考察，我們可以得出如下之推斷：

1. 籌算之加、減法和乘除法均由高位數算起，亦即由左而右計算的，此與現代通行之筆算運算法相反，現代之筆算乃由低位數算起，由右向左計算的。
2. 此種計算與現代通用之珠算加減法基本上相同，其所不同者；珠算使用算盤撥動算珠，而籌算則用籌計算。
3. 珠算加減乘除法曾有相當完整之歌訣，而籌算則尚本發現有類似的歌訣。

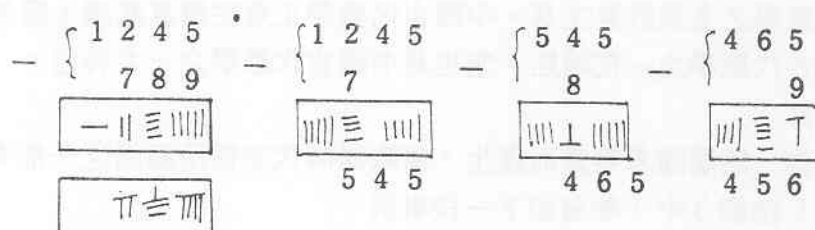
1. 加法：

用籌算計算則爲；首先用算籌列出 $\begin{array}{r} \text{三} \\ \text{十} \end{array}$ ，然後將 789 之百位 7 加入 456 之百位 4 之中，依次再加十位和個位之數目，“由高位算起”，亦即由左向右計算；見下圖：



一 二 三 四 減 五 六 七 八 九 即 1 2 4 5 - 7 8 9

首先列出一 11 三 1111，次由百位中減去 11，依次減去十位和個位之數碼，減去仍由左向右計算；見下圖：



3. “九九歌”有關之一則故事：

首先介紹“九九歌”之內容，其歌訣為：一一得一，一二得二，一三得三，……，一九得九。二二得四，二三得六，……”此與現代之九九乘法口訣相似，然而“九九歌”究從何時開始有此歌訣？

其實古代“九九歌”與現代九九口訣不同，而由“九九八十一”開始。正因為從“九九八十一”開始，故稱之謂“九九”。同時“九九”此一名詞便延用至今。

欲探究“九九歌”係從何時起，在此引用一則故事為例：

據說：春秋時代齊桓公曾經設立招賢館徵求各方面之人材，等了許久迄未見有人來應徵。約過了一年，突然來了一個人，把“九九歌”獻給齊桓公，作為表示才學之獻禮。齊桓公覺得可笑又可憐，就對此人說：“九九歌”也能拿出來表示才學嗎？此人回答說：“九九歌”雖談不上才學，但如果您對我這僅僅九九歌的人亦能重禮相待的話，那還怕高明的人材不會接連而來投效於您嗎？齊桓公覺得這話有道理，就把他接進招賢館，並給以隆重之招待。不到一個月，果然由四方來了許多有才幹有學問之士投效齊桓公了。

4. 乘法：

籌算之乘法：係將相乘二數一上一下對列，使其中一數之最高位與另一數之最低位對齊；中間留一列空着，然後用上面數中之最高位數依次自左而右地乘下面之每一位，其結果隨乘隨加，寫入中間空着的一列中；上面之某一位數每乘遍了下數後，便將該一位數去掉，並將下面之數右移一位；再用上面之數最高位遍乘下數之每一位，其結果仍如前隨乘隨加入中間之一列。中間一列得出來的數就是乘得之積。

11 三 川 乘 111 三 7 即

2 3 4 × 4 5 6，先將兩數上下對列如圖(1)，上位列乘數，下位列被乘數，中位留着寫積。其次把被乘數4 5 6左移，使其最低位和乘數2 3 4之最高位對齊。以2 3 4中的最高位2依次乘遍被乘數4 5 6各位數字，記入中位，並隨乘隨加得9 1 2，如圖(2)。把2 3 4中的2消掉後把4 5 6全體向右移一位，如圖(3)。第二步：用2 3 4中的3依次乘遍被乘數4 5 6，隨乘隨加入中位9 1 2中，得1 0 4 8 8。消去2 3 4中之3，把4 5 6再右移一位，如圖(4)。以2 3 4中最後一位4遍乘4 5 6，隨乘隨加入中位，得1 0 6 7 0 4。消掉2 3 4中之4，即全部乘畢，如圖(5)。

(1)

234
456

 上位
中位
下位

(2)

234
→912
456

 上位
中位
下位

≡
—
≡丁

 上位
中位
下位

$$(2 \times 4 =) 8$$

$$(2 \times 5 =) 10 (+$$

90

$$(2 \times 6 =) 12 (+$$

912

(3)

34
→912
456

 上位
中位
下位

≡
—
≡丁

 上位
中位
下位

912

$$(3 \times 4 =) 12 (+$$

1032

$$(3 \times 5 =) 15 (+$$

1047

$$(3 \times 6 =) 18 (+$$

10488

(4)

4
→10488
456

 上位
中位
下位

≡
≡

 上位
中位
下位

10488

$$(4 \times 4 =) 16 (+$$

10648

$$(4 \times 5 =) 20 (+$$

10668

$$(4 \times 6 =) 24 (+$$

106704

(5)

106704
456

 上位
中位
下位

丁 ≡
≡ 丁

(5) 除法：

除法與乘法相反，被除數稱之謂“實”，除數稱為“法”，除得之結果稱為“商”

”。籌算除法，例如： $106704 \div 456$ （ $\begin{array}{r} 1 \\ \perp \\ \text{除} \end{array}$ ），先將“實” 106704 與“法” 456 對列，如圖(1)，即恰如上文乘法例中最後所得之圖(5)。次將 456 左移，至能使 1067 被 456 除為度，除得商數 2 ，記入上層空着的一列。以商數 2 ，乘遍法數 456 各位，隨乘隨減，得第一次之餘數 15504 ，如圖(2)。第二步將“法”數 456 右移一位，再除，得第二位商數 3 。以 3 遍乘法數 456 各位，由第一次餘數 15504 中隨乘隨減，即得第二次餘數 1824 ，如圖(3)。最後，再將 456 右移一位，除得第三位商數 4 。以 4 遍乘 456 各位，隨乘隨由第二位餘數 1824 中減去，適盡 1 如圖(4)。無餘數，表明已整除完畢，得商數為 234 ，如圖(5)。

(1)

106704
456

商（上位）
實（中位）
法（下位）

(2)

2
→ 106704
456

商（上位）
實（中位）
法（下法）

1067
(2×4=) 8 (—
267
(2×5=) 10 (—
167
(2×6=) 12 (—
-----155

(3)

23
15504
456

商（上位）
實（中位）
法（下位）

-----→ 1550
(3×4=) 12 (—
350
(3×5=) 15 (—
200
(3×6=) 18 (—
-----182

從籌算到珠算的演變——2

一、前言

國珠聯

從第一篇；籌算之創始、籌算之數字、籌算之加減乘除法，甚至籌算之開平方與開立方等（因篇幅未及列入）。我們當可瞭解珠算被使用，或興盛之前，我國古代數學不僅已有籌算，尚且還有許多高深的各種數學，其中尤有很多因為後起無人，或不甚實用而逐漸被人所遺忘，而那些曾被遺忘的各種數學中，尚有許多為現代數學家窮一生之力在那裏研究着。總而言之，筆者企盼再藉此喚起珠算界，尤其有心人士正視我國古代數學之精華，早日正面去探掘並加以研究，則必將對我現代化之科技必然有益。本篇係屬於第二篇，擬就籌算演變之結果，與珠算何以應運而生？同時仍應留意珠算應運而生之結果及影響，進而對今後之珠算，甚至於國家建設有裨益，則為筆者所盼者。

二、珠算產生之時代背景

中國古代數學曾在宋元時期發生了巨大發展與結果，而這些成就都是來自籌算的基礎，及籌算進一步演變的結果。然而這些輝煌的成就與發展，並沒有維持很久，亦沒有走向更高的水平。相反地；許多重要的成果，如“天元術”與“四元術”，“招差術”與“高階等差級數求和”等，却很快地衰退下來，甚至幾乎失傳了。迄至公元十五世紀，明朝的一些數學家，對“天元術”、“四元術”就幾乎全然不能理解了。在明朝以至於清朝初數百年間，“天元”、“四元”幾乎成為“絕數”。

其原因最主要就是此種發展脫離了當時社會的實際需要。就以“天元術”為例，當時在生產或一般實業中應用的實在很少見。因為當時社會經濟各方面之需要，包括其它科學發展的需要，實在找不到任何具有實際意義的問題。需要求解四次或四次以上之高次方程之問題。至於高次聯立方程式，那就更找不到任何有實際問題。上述問題所顯示的癥結就是；數百年前之中國社會，或稱以農立國之社會，日常經濟生活所需要應用之計算術或計算方面之學問，祇符合於日常經濟生活需要之實務計算即夠用，所謂高深之數學，似尚無此需要，而那些高深之數學，則為科技方面所需要。

明朝自建國到公元十六世紀末陷於衰亡，約二百五十餘年，其間社會經濟之發展也有興有衰，然而整體而言仍然是不斷地上升。各種手工業、商業與海外貿易，均有很大的進展，此種發展特別是商業貿易方面，對數學產生了日益繁重與日趨複雜之計算任務。諸如大量之計算問題（絕大部分是加、減、乘、除四則運算問題）；則必需計算得更快與更加便利。在此情況下，古代流傳下來之籌算已經不適用於用來完成這方面之任務了。此乃顯示對籌算必須做徹底而適當之改革。因為籌算之乘除法需要上下擺成三層，所以計算起來極為不方便。其次籌算的加減法也需要不斷地改變算籌之擺列形式，是以欲求迅速計算是很難做到的。雖然在宋朝已開始採用了筆寫之籌碼來代替算籌之擺列，但是籌算方法上的基本特點仍沒有改變。於是為了改變與適應此種缺陷，一種新的計算工

具——珠算盤便產生了。

珠算盤之出現乃是中國數學史上的一件大事，也就是計算工具完全改變了。這種攜帶方便、使用方法極其簡單之計算工具，至今仍然在中國人民間廣泛地應用着。同時珠算盤還曾流傳至朝鮮、日本等亞洲國家，甚至美國、巴西等各國，這些國家不但沿用至今，同時更在發揚當中。

珠算是籌算基礎上演變而來，那麼由籌算演變成爲珠算；究竟需要那些條件或過程呢？

三、唐朝末年乘除簡捷算法

籌算之改革，早在公元八世紀，亦即晚唐時期已經開始了。其所以有改革之義，主要還是與唐朝中葉時期社會經濟之發展有不可分之關係。而這些主要改革乃表現於乘除法之改進上。古代之籌算，乘除法均需擺列成上、中、下三層。晚唐以來之數學家一直在努力地尋找一種“乘除捷法”，希望能將三層算籌才能完成之乘除算法，僅用一層算籌即可完成。

(一)加乘減乘、加除減除法之發明數

以前所流傳之夏侯陽算經中保存了一些問題，都是利用把多位數乘除變爲單位數乘除之算法。此乃正是變三層算法爲一層算法之最好例證。如當時乘數爲48時，就用6乘之後再用8乘；除數爲18時，就先折半之後再用3除；化斤爲兩（1斤=16兩）時，則用2乘後再用8乘；兩化爲銖時（1兩=24銖），則先用3乘後再用8乘。

又當乘數之首位是1時，可以“以加代乘”。如乘數14時，可用“身外添四”法；乘數爲144時，用“身外添四四”法，乘數爲102時，用“隔位加二”來計算。同樣，除法之除算首位是1時，可以用減法來代替除法。如除數爲12時，同樣可用“身外減二”法進行計算。

當乘除法之乘數與除數首位不是1時，可以用各種變通之方法使它化爲1來計算。此種“化爲1”之方法叫“求一”，或叫“得一”。【新唐書，藝文志】中記載了“江本【一位算法】二卷，陳從運【得一算經】七卷”等書。這些書都已經失傳。據【宋史，津歷志】中有“陳從運”【得一算經】，其術以因，折而成，取損益之道，且變而通之，皆合於數之記載。“其術以因、折而成，取損益之道”，這正是“求一”或“得一”算法之主要內容。

有關籌算乘除之改革，在整個宋元時代一直沒有停止過。在流傳至今的南宋楊輝之著作中，保存着若干這方面之材料。如在其著【乘除通變算寶】卷中裏就有系統地敘述了“以加代乘”與“以減代除”之方法。書中除敘述了“加一位”（乘數爲11、12、……19）、“加二位”（乘數是111、112、……199）、“重加”（乘數可分解者，如 $247 = 13 \times 19$ ）、“隔位加”（101、102、……109）等，以及“減一位”、“減二位”、“重減”、“隔位減”方法之外，還給“求

“一代乘”算法編了八句歌訣。通過八句歌訣可以對“求一代乘”算法得到概括的瞭解。這八句歌訣是：“五六七八九，倍之數不走。二、三須當半，遇四兩折扭。倍、折本從法，實即反其有。用加以代乘，斯數足可守。” 歌詞“倍、折本從法，實即反其有”兩句中，“法”指的是乘數，“實”指的是被乘數。楊輝自己在這兩句之下注道：“倍法必折實，倍實必折法”。這就是說“法被2乘，則“實”必折半；反之亦然。整個歌訣之意思是說：當乘數首位數字是5、6、7、8、9時，可以將乘數算成2倍，使它的首位變成1。當乘數首位是2、3時，可以將乘數折半，把它的首位變成1。當乘數首位是4的時候，可以用2連除2次，也把它的首位變成1。然後再用“加一位”、“加二位”等“以加代乘”的方法計算。與此同時，假如最初是乘數加倍，須將被乘數折半；假如最初是乘數折半，那就須將被乘數加倍。

四、珠算取代籌算

在上節唐朝末年乘除簡捷算法中，吾人已能瞭解籌算之被運用於乘除法時，需分成三層計算之不便與不實用，遂由籌算之改革演變至珠算之廣泛使用。而在籌算演變成珠算之實用過程中，最具有代表性與關鍵性之計算乃是“歸除歌訣”（包括“撞歸訣”、“起一訣”），因為籌算中把除法稱為“商除”。亦即除的時候要反覆的商議思考，方可想出商來。有了歸除歌訣之後，“商除”就可以變成像“一退六二五”的“化零歌”一般，根據口訣一呼，即得商數。（在此特地將籌算除法必須先按出商之後，再加以一一減除，亦即現代之所謂商除法加一介紹者，主要乃是因為當今之學生仍有許多不知道商除法之由來，或僅知道宋朝數學家為了減少按商之麻煩，創造了歸除歌訣解決當時學生學習之麻煩與困擾而已，為此特地加以備註以為參考。）。清初數學家梅文鼎（公元1633～1721年）云：“歸除歌訣最為簡妙，此盤珠所持以行也。”梅文鼎一席話當然有道理，因為“歸除歌訣”形成之後，籌算乘法之每位得數按九九歌訣一呼即得；籌算除法之每位得數，按“歸除歌訣”亦可一呼即得。為此愈顯出籌算（需不斷改變算籌之擺列）這一計算工具趕不上要求。口中一呼“二一添作五”，把原來位置上之一變為五，要一根一根地添入四根算籌。手趕不上口，更趕不上計算時思考之速度。於是籌算到這時便非改變不可了。

人們將算盤來代替一根根的算籌，因為珠算盤之構造乃在模仿籌算，繼承了籌算記數法中之一些制度；它是在古代籌算之基礎上演變而成的。

然而珠算盤究竟產生於何時代，最初創造者又誰？這兩個問題迄至今日仍無法提出確切的答案。此說明了珠算並非少數人或一個人之創造，而是整整一個時代之產物，是在廣大人民群眾日常生活需要之推動下，逐漸改變以至最後完成的。珠算經過一系列有關文獻之研究，或可推斷；最遲公元十五世紀初期，珠算已經在當時的社會上廣泛應用了。

珠算最早之記載，諸如漢朝末年“捨數記遺”，或元朝末年（公元十四世紀中葉）

。在陶宗儀所著《輟耕錄》中有一段記載，但單為珠算記載或寫作者，似乎在當時未曾見過。

在流傳至今的書籍中，最早對珠算有系統介紹者，而在書中繪有珠算盤形式，並且編有加減法口訣的，是公元1573年（明萬曆元年）徐心魯所校訂的《盤珠算法》。但是在這以前，吳敬著的《九章算法比數大全》，與王文素著《算學寶鑑》，均記載一些只有在珠算中才能出現之算法。這兩部著作中都有所謂“起五訣”（或稱“作五訣”和“破五訣”）（現今之“五的補數”的口訣）特別是“破五訣”更顯然是珠算算法。“破五訣”說：“無一去五（或稱“無一破五”）下還四，無二去五下還三，……。”

直到明末止，除上述徐心魯《盤珠算法》之外，現有傳本的書籍中，講述珠算法的還有柯尚遷所著的《數學通軌》（公元1578年），朱載堉的《算學新說》（公元1584年），程大位的《直指算法統宗》（公元1592年）、《算法纂要》（公元1598年），黃龍吟的《算法指南》（公元1604年）等書。其中以程大位之《直指算法統宗》傳播最廣，影響也最大。