

中國古代數學之成就——開方與高次開方之研究

一、前言

國珠聯

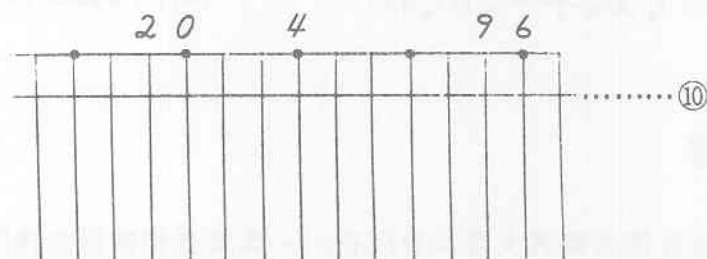
屈指一數自從筆者編著大專珠算用書——珠算實習教材前後四冊，以為各大專珠算科用書以來已十有八年，因筆者一直在大專執教，深覺一般珠算用書泰半偏重於高商，及實用性，想找一本既實用而又富於研究性之書籍却從未見過，無奈憑着兼從事於教育及兼教珠算課之便，遍找我國有關古代數學書籍的結果；恍然大悟，原來我國古代數學內容之豐富、項目之多、科技性之高，即使是科學倡明之太空時代，仍可拍胸叫絕！至此不能不自覺身為中華民族是何等的驕傲！！然而時至今日究竟有多少人能適時響應 總統蔣公恢復中華文化；發揚國粹之遺訓？！再想想最近除大專已將珠算課加以刪減之外，連高商亦在大事修減之事實看來，焉不令人痛心疾首！！將來有朝一日，果真有人要加以結算究竟何人才是毀滅中華文化之罪魁禍首時（指珠算——包括古代數學），究應指萬惡的共匪，還是那些曾喝過半瓶洋墨水的號稱歸國學人呢？我們應響應科技現代化，甚至更應求整個國家早日邁入開發國之林，以便及早以三民主義統一中國，但是所謂科學、現代化、電腦化，並非人人、家家、事事都電腦化，好比所謂試管嬰兒乃是那些生育有問題之士女，又如所謂電腦化尤非日常生活樣樣都仰仗電腦，更不是人類每日生活均電腦……，總之有些歸國學人的確令人敬佩投地，他（她）們對國家民族的貢獻委實太大了，但有時我們也怕那些對任何事似懂非懂的少數專家，只要他們的觀念一有偏差，其損失往往無法補救。筆者從公三十有五載，書唸得不多，但所謂電腦確實也學了數年，同時也曾經處理過不少資訊資料，但是很少聽過那些荒唐謬論。但願借此園地再將十七年前研究過的有關古代之高次開方等再作一次深入研討，用以有朝一日作古時，能留一些紀念！！

二、本文

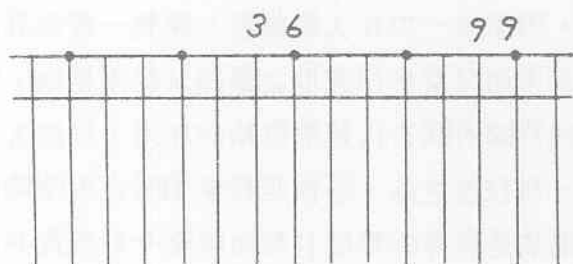
（一）開方法之發明：

開方法我國發明最早，據稱黃帝命隸首作算數：「一曰方田，二曰粟米，三曰衰分，四曰少廣，五曰商功，六曰均輸，七曰贏不足，八曰方程，九曰勾股」。此乃古稱九章算術。九章方程中有天元一法，借天元一，代未知之數，為開方之古算法，與後世借根方代數術相似。宋、秦九韶數學九章：「一曰大衍，二曰天時……九曰市易」。其大衍術中，亦載有天元一法。元李治測圓海鏡，皆以

$$\textcircled{8} \times 4$$



$$\textcircled{9} - \textcircled{10}$$



$$36 \div 4 = 9$$

$$z = 2\frac{3}{4} - \textcircled{11}$$

$$\textcircled{11} \text{ 代入 } \textcircled{8}$$

$$5y + 2\frac{3}{4} = 24$$

$$5y = 24 - 2\frac{3}{4}$$

$$= \frac{24 \times 4 - 11}{4} \text{ 故 } y = \frac{(24 \times 4 - 11) \div 5}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$y \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 3x + 2(4\frac{1}{4}) + 2\frac{3}{4} = 39 \text{ 故 } x = 9\frac{1}{4}$$

此演算，至明而其學失傳。清初借根方術由歐輸進，其原理與天元相通，始稍稍闡明其法。

中國古代天元開方，經清代學者闡明其法之後，仍沿用古名，從事演算。如開平方時，平方數之分節，稱為分幅。根數稱為商數，平方數稱之為實數。初商之二十倍，稱為廉法。廉法加次商，稱為廉隅共法。古時以廉字作邊字解，隅字作角字解，故天元開方之廉法，即首商兩邊面積之計算。廉隅共法，即兩邊面積再加以兩邊角端一小方之面積。

開立方時將初商自乘又三百倍之，稱為方廉。以次商乘初商又三百倍之，稱之為長廉。初次商自乘又三百倍之，仍稱為方廉。次商自乘稱為隅，加方廉長廉稱為廉隅共法。故開立方時之次商有三方廉，即由三邊形之三個長立方體。一小方隅，即長立方體角端之一小立方體。

開方術係於公元1733年由法國數學家(Abraham De Moivre 導演出來。當時另有數學天文家(Laplace 1749 ~ 1827)及K. Gauss (1777 ~ 1855)，彼此各不相關之獲致此一分配形式，而且似乎均不知De Moivre之發明。從此以後，開方之法便大行於世。

開方英文 Evolution .

開平方英文 Extvaction of square root .

開立方英文 Extvaction of cenbe root .

(二)增乘開方法——高次方程之數值解法。

1 增乘開平方、開立方方法：

從九章算術中便已經有了完整之開平方和開立方之方法。開平方法即求解 $x^2 = A$ 之一種數值解法。開立方方法即求解 $x^3 = B$ 之一種數值解法。其實我國古代就把求解一般方程之數值解法稱之為“開方法”，亦即一般方程之數值解法，均由開方之方法推演出來的。如求解 $x^2 + ax = b$ 之類的一般二次方之方法（稱為“帶從開平方”），乃是由開平方之方法推演出來的。而 $x^3 + ax^2 + hx = c$ 類之一般三次方程之解法（稱為“帶從開立方”），係由開立方之方法推演出來者。

宋、元朝之數學家們，更把古代之“開方法”前推進了一大步，終於解決了開任意高次方程之開方問題，同時也解決了求解任意高次方程之數值解法之問題。

2 “開方作法本源”圖——二項式定理系數表：

宋朝數學家賈憲不僅創造了新的開平方和開立方之“增乘開方法”，尚且

還創造了開任意高次冪之高次開方法。

正如： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

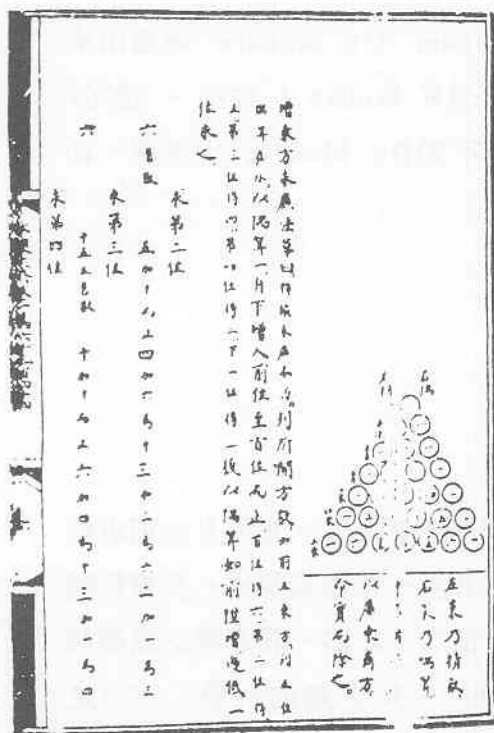
一般高次開方法（如四、五次開方法）便要利用公式：

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

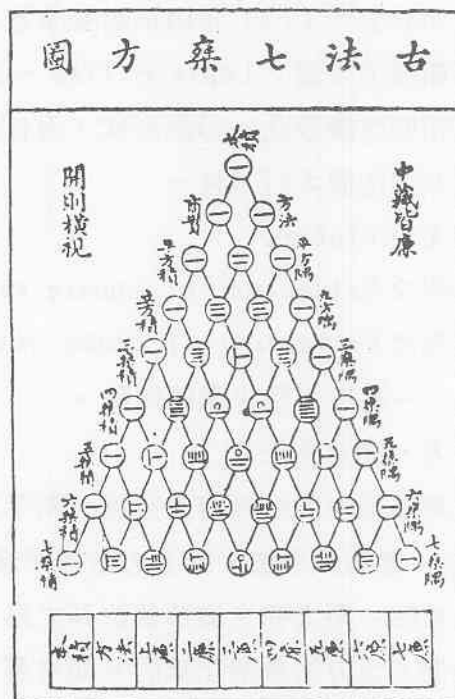
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

上列公式之重要關鍵在於能事先獲悉各高次展開式之各項系數。

賈憲不但將各公式之系數提示，而且還將求出這些系數之方法（詳“開方作法本源圖”及“古法七乘方圖”）：



“開方作法本源”圖



古法七乘方圖

“開方作法本源”圖及“古法七乘方圖”之係數乃由一個由數字排列成三角形之數表，如下表：

/
 / /
 / 2 /
 / 3 3 /
 / 4 6 4 /
 / 5 10 10 5 /
 / 6 15 20 15 6 /

“開方作法本源”圖之系數表

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & / & \backslash & & \\
 & & & / & & / & & \\
 & & / & & 2 & & / & \\
 & / & & 3 & & 3 & & / \\
 / & & 4 & & 6 & & 4 & / \\
 / & & 5 & & 10 & & 10 & 5 & / \\
 / & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & 6 & / \\
 / & & 7 & & 21 & & 35 & & 21 & & 7 & /
 \end{array}$$

古法七乘方圖之系數表

三、開平、開立及高次開方之發明

上述各項係就我國古代數學中有關開平、開立，及高次開方之發明、創作略作介紹，並且特別闡述高次開方之重要關鍵“開方作法本源”圖之系數表，及“古法七乘方圖”之系數表之運用。否則？必然有許多人還深以為開平、開立，甚至高次開方法乃從國外所輸入？而事實上在我國却於一千多年前已有極為適用、良好，且令人難於置信之開方法產生，既令人欣慰、驕傲，而又惶恐不已！關於高次開方；筆者曾於十五年前曾加以研究過，本篇願繼續再深入研究與介紹。

四、高次開方之意義

“帶從開平方”（一般二次方程）、“帶從開立方”（一般三次方程）是由普通的籌算開平方、開立方推演而出一樣，把“增乘開方法”推而廣之，使它成為求解一般高次方程之普遍解法並不十分困難。

通常稱求A之n次根之方法稱為高次開方，在 $\sqrt[n]{A} = x$ 中，如 $n > 3$ 時，便稱之為高次開方，當 $n = 4$ ，則其開方稱為四次開方，所求得之x稱為A之四次根，又 $n = 5$ 時，則其開方稱為五次開方，所求出之x稱之為A之五次根， $n = 6$ 時……， $n < 9$ 之高次開方中， n 為4、6、8、9時，按指數法則，可配合運用開平方開立方之法，當可求出。茲將高次開方法列明如下：

假設：

$n = 4 \cdots \cdots$ 開平方二次

$$\therefore A^4 = (A^2)^2$$

$n = 6 \cdots \cdots$ 開平方與開立方各一次

$$\therefore A^6 = (A^3)^2$$

$n = 8 \cdots \cdots$ 開平方三次

$$\therefore A^8 = (A^4)^2 = [(A^2)^2]^2$$

$n = 9 \cdots \cdots$ 開立方二次

$$\therefore A^9 = (A^3)^3$$

如 n 爲 5 或 7 時，當應由其所構成五次方式，或七次方式之數理可推出其開方法。

五、五次開方

(一) 五次九九：

$$\begin{array}{lll} 1^5 = 1 & 4^5 = 1,024 & 7^5 = 16,807 \\ 2^5 = 32 & 5^5 = 3,125 & 8^5 = 32,768 \\ 3^5 = 243 & 6^5 = 7,776 & 9^5 = 59,049 \end{array}$$

(二) 定位法：

1. 整數時：

五次根爲整數一位數，則其最小之數爲一，其最大之數爲 9，其五次方數爲：

$$1^5 = 1 \quad 9^5 = 59,049$$

如五次根爲整數二位數，則其最小的數爲 10，其最大之數爲 99，其五次方數爲：

$$10^5 = 100,000 \quad 99^5 = 9,509,900,499$$

2. 數理及算則：

(1) 商除法之定數法五次開方法。

五次根爲二位根時：

設首位根爲 a ，次位根爲 b ，則五次方式爲：

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

a. 求首位根：

$$(a + b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

b. 求次位根：

除於定數「5」，除去求首位根後之餘數

$$(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \div 5 = a^4b + 2a^3b^2$$

$$+ 2a^2b^3 + ab^4 + \frac{b^5}{5}$$

除於首位根「 a 」，除去上述（除於首位根「5」）之商

$$(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4 + \frac{b^5}{5}) \div a$$

$$= a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a}$$

c. 以首位根之立方數「 a^3 」爲法數，除去 b 所得之數之方法，得次位根（

b)，然後減去法數「 a^3 」與次位根（ b ）相乘之積「 a^3b 」，

$$\begin{aligned} & (a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a}) - a^3b \\ &= 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a} \end{aligned}$$

d. 減去首位根之平方數「 a^2 」與次位根之平方數「 b^2 」相乘之積，再乘以 b 之積數（減去「 $2a^2b^2$ 」），

$$\begin{aligned} & (2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a}) - 2a^2b^2 \\ &= 2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a} \end{aligned}$$

e. 減去首位根「 a 」與次位根之立方數「 a^3 」相乘之積，再乘以 b 之積數（減去「 $2ab^3$ 」），

$$(2ab^3 + b^4 + \frac{b^5}{5a}) - 2ab^3 = b^4 + \frac{b^5}{5a}$$

f. 減去次位根之四次方數「 a^4 」（減去「 $b^2 \times b^2$ 」），

$$(b^4 + \frac{b^5}{5a}) - b^4 = \frac{b^5}{5a}$$

g. 以首位「 a 」為法數，乘以 1 之餘數，

$$\frac{b^5}{5a} \times a = \frac{b^5}{5}$$

h. 以定數「5」為法數，乘以 g 所得之數，

$$\frac{b^5}{5} \times 5 = b^5$$

i. 減去次位根之五次方數「 b^5 」，而得五次根，

$$b^5 - b^5 = 0$$

註：五次根為三位數或三位數以上時，第三根或第三根以後之五次根之求法，依照 2 次根之求法，逐次計算之。

※五次根為三位數或三位數以上時，第三根或第三根以後之五次根的求法，依照 2 次根之求法，依次類推順序計算即可。

六、五次開方之計算方法

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
8	2												
						1	2	9	6	0	0	6	0
						-	1	2	8	0			
										1	6	0	0
												6	0
													2

($80 \times 2^3 \times 2 = 1,280$)

⑤將餘數再減去80與第二位根之立方數8相乘之數640，再乘以2之數1,280。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
8	2												
						1	6	0	0	6	0	2	
						-	1	6					
												6	0
													2

($2^4 = 16$)

⑥減去第二位根2之四次方16。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
8	2												
												6	0
													2
												$\times 5$	
												3	2

⑦餘數60乘於定數5還原得30加餘數2得32。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
												3	2
												-	3
													2
													0

($2^5 = 32$)

⑧最後減去第二位根2之5次方數32即得根32。

(2) $\sqrt{2,219,006,624} = 74$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
						2	2	1	9	0	0	6	6
												2	4

B區分 A區分

將本題分為A、B兩區分

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
7													
						2	2	1	9	0	0	6	6
												2	4
						-	1	6	8	0	7		
												5	3
													8
													3
													0
													6
													6
													2
													4

①依22,190求出首位根7，並減去 $7^5 = 16,807$ ，得餘數538306624。

A B C D E F G H I J K L M N

7 4 2 0 4 0 4 (5 × 204 = 1020)

1 0 2 4 102)

⑧再將 20 乘於定數 5 得 102 加餘數 4 得 1,024。

A B C D E F G H I J K L M N

7 4 1 0 2 4

- 1 0 2 4

0

(45 = 1,024)

⑨最復減去 4 的五次方數 1,034 即得根 74。

七、七次開方

(一)五次開方，已如前節所介紹，本節將再作七次開方像徵式之解說，以資參考，七次開方時，須先熟記各基數之四、五、六、七次方數。列明如表：

四次方數

$$I^4 = I$$

$$4^4 = 256$$

$$7^4 = 2,401$$

$$2^4 = 16$$

$$5^4 = 625$$

$$8^4 = 4,096$$

$$3^4 = 81$$

$$6^4 = 1,296$$

$$9^4 = 6,561$$

五次方數

$$I^5 = I$$

$$4^5 = 1,024$$

$$7^5 = 16,807$$

$$2^5 = 32$$

$$5^5 = 3,125$$

$$8^5 = 32,768$$

$$3^5 = 243$$

$$6^5 = 7,776$$

$$9^5 = 59,049$$

六次方數

$$I^6 = I$$

$$4^6 = 4,096$$

$$7^6 = 117,649$$

$$2^6 = 64$$

$$5^6 = 15,625$$

$$8^6 = 262,144$$

$$3^6 = 729$$

$$6^6 = 46,656$$

$$9^6 = 531,441$$

七次方數

$$I^2 = I$$

$$4^7 = 16,384$$

$$7^7 = 823,543$$

$$2^7 = 128$$

$$5^7 = 78,125$$

$$8^7 = 2,097,152$$

$$3^7 = 2,187$$

$$6^7 = 279,936$$

$$9^7 = 4,782,969$$

(二)七次開方法：

(1)七次根之定位法：

a. 七次根為整數時：

如七次根為整數一位數，則其最小的數為 1，其最大的數為 9，其七次方數為：

$$1^7 = 1 \qquad 9^7 = 4,782,969$$

如七次根為整數二位數，則其最小的數為 10，其最大的數為 99，其七次方數為：

$$10^7 = 10,000,000 \qquad 99^7 = 93,206,534,790,699$$

如七次根為整數三位數，則其最小的數為 100，其最大的數為 999，其七次方數為：

$$100^7 = 100,000,000,000,000$$
$$999^7 = 993,020,965,034,979,006,999$$

依上述可知，倘七次根為整數一位數時，七次方數應為整數一位數至七位數。又如七次根為整數二位數時；七次方數應為整數八位數至十四位數。如七次根為整數三位數時；七次方數應為整數十五位數至二十一位數，餘此類推。

b. 七次根為小數時：

如七次根為小數而祇有小數第一位數，則其最小的數為 0.1，其最大的數為 0.9，其七次方數為：

$$0.1^7 = 0.0000001 \qquad 0.9^7 = 0.4782969$$

七次根為小數而至小數第二位數，則其最小的數為 0.01，其最大的數為 0.99，其七次方數為：

$$0.01^7 = 0.000000000000001$$
$$0.99^7 = 0.93206534790699$$

七次根為小數而至小數第三位，則其最小的數為 0.001，其最大的數為 0.999，其七次方數為：

$$0.001^7 = 0.0000000000000000001$$
$$0.999^7 = 0.993020965034979006999$$

依上述，可知七次根為小數一位數，其七次方數應為小數七位數。七次根為小數二位數，其七次方數應為小數十四位數，餘此類推。又如七次根為小數而小數第一位數為零，其七次方數之小數第一位數至第七位數均應為零，即小數點以下首段之整段七位數字均為零，同樣如七次根之小數第一、二位均為零，其七次方數之小數第一位數至第十四位數仍應為零，即小

數點以下之首段及第二段整段十四位數字均為零。

c. 七次根為帶小數時：

開七次方數為帶小數，其七次根仍為帶小數。其定位仍以開七次方數的整數部份，從個位數開始向左以每七位數字做為一段，把開七次方數加以分段，所得段數即為七次根之整數位數，開七次方數之小數部份不必分段：

(2) 七次開方之數理及算則：

七次開方雖仍有各種算法，但均為煩難而複雜，故本節僅講解商除法的定數法七次開方法。

七次根為二位數時：

設，初根為 a ，次根為 b ，則其七次方式為：

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 + 21a^5b + 35a^4b^2 + 21a^3b^3 + 7a^2b^4 + 7ab^5 + b^7$$

① 初根之求法：

依初根(a)，從上式減去初根之七次方數(a^7)，

$$(a+b)^7 - a^7 =$$

$$7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^5 + b^7$$

② 初根之求法：

$$\textcircled{a} (7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^5 + b^7) \div 7$$

$$= a^6b + 3a^5b^2 + 5a^4b^3 + 5a^3b^4 + 3a^2b^5 + ab^5 + \frac{b^7}{7}$$

③ 以初根「 a 」為法數，除去②所得之數，

$$(a^6b + 3a^5b^2 + 5a^4b^3 + 5a^3b^4 + 3a^2b^5 + ab^5 + \frac{b^7}{7}) \div a$$

$$= a^5b + 3a^4b^2 + 5a^3b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}$$

④ 以初根之五次方數「 a^5 」為法數，除去③所得之數之方法，得次根「 b 」然後減去法數「 a^5 」與次根「 b 」相乘之積「 a^5b 」，

$$(a^5b + 3a^4b^2 + 5a^3b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}) - a^5b$$

$$= 3a^4b^2 + 5a^3b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}$$

⑤ 減去，初根之四次方數「 a^4 」與次根之平方數「 b^2 」相乘之積，再乘以

「3」的積（減去「 $3a^4b^2$ 」），

$$(3a^4b^2 + 5a^3b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}) - 3a^4b^2$$

$$= 5a^3b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}$$

⑥減去，初根之立方數「 a^3 」與次根之立方數「 b^3 」相乘之積，再乘以「5」的積（減去「 $5a^3b^3$ 」），

$$(5a^2b^3 + 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}) - 5a^3b^3$$

$$= 5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^6}{7a}$$

⑦減去，初根之平方數「 a^2 」與次根之四次方數「 b^4 」相乘之積，再乘以「5」的積（減去「 $5a^2b^4$ 」），

$$(5a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}) - 5a^2b^4$$

$$= 3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}$$

⑧減去，初根「 a 」與次根之五次方數「 b^5 」相乘之積，再乘以「3」的積（減去「 $3ab^5$ 」）

$$(3ab^5 + b^6 + \frac{b^7}{7a}) - 3ab^5 = b^6 + \frac{b^7}{7a}$$

⑨減去，次根之六次方數「 b^6 」

$$(b^6 + \frac{b^7}{7a}) - b^6 = \frac{b^7}{7a}$$

⑩以初根「 a 」為法數，乘以⑨之積餘數，

$$\frac{b^7}{7a} \times a = \frac{b^7}{7}$$

⑪以定數「7」為法數，乘以⑩所得之數，

$$\frac{b^7}{7} \times 7 = b^7$$

⑫減去，次根之七次方數「 b^7 」，而得七次根。

$$b^7 - b^7 = 0$$

倘七次根爲三位數或三位數以上，則第三根或第三根以上之七次根求法，依照 2、次根之求法，逐次計算即可。

返顧五次開方算法例解，可瞭解其算法極爲煩難，七次開方的算法尤爲複雜。因七次開方除了需各基數之二、三次方數之外尚須熟記各基數之四、五、六、七次方數，而各次方數之運用，須靈活且要正確，不宜有絲毫之差，難學又不實用。故高次開方應以對數之數理使用對數表運算較佳。是以七次開方僅作講解數理及算則，算法則簡略之。