

過大數加乘法與減乘法之計算研究

徐德旺

壹、前言

珠算因係一門技能學科，故在對於各項目的計算問題上，常出現了各式各樣的不同計算方法，那麼，至於到底應該是以何種計算方法較為理想呢？此一問題實甚難有決定，可說是見仁見智的看法，不過依筆者想應視當時計算環境以及題目性質、目的等等因素來決定其算法較為理想。故吾人學習珠算應在計算方法上多學習一些特殊計算，俾於應付日後之需要。

貳、較特殊名詞的詮釋

(一)過大數：即較某一個數高一單位成 10^n 之數，或較某數略大而經簡化後成 10^na 數，這些數都稱為過大數。

茲舉例分別說明如下：

(1)較某一個數高一單位成 10^n 之數

例如： 94 高一單位成 10^2 之數為 100 (過大數)

993 高一單位成 10^3 之數為 1,000 (過大數)

9,827 高一單位成 10^4 之數為 10,000 (過大數)

(2)較某數略大經簡化後成 10^na 數

例如： 79 簡化成 80 (過大數)

594 簡化成 600 (過大數)

8,963 簡化成 9,000 (過大數)

(二)過大實數：在一題乘算計算式子中，按上述的方法將被乘數化為過大數者稱為過大實數。

(三)假法數：在一題乘算計算式中，若乘數首位數係 1 時，將乘數首位數 1 省略掉，其餘數就稱為假法數。例如，乘數 127 首位數 1 省略掉，其餘數 27 稱為假法數；另一情形乘數首位數係 9 或 8 時，將其乘數化成對 10^n 之補數，這補數亦稱為假法數。例如，897 對 10^3 其補數 103 稱為假法數，又如 96 對 10^2 其補數 04 亦稱為假法數。

(四)補數：即某數與 10^n 相差之數稱為補數。例如，65 對 10^2 其差數係 35 稱為補數。

叁、過大數加乘法之計算

(一)定義：利用過大實數以及過大實數與實數之差數，而以加乘法的方法計算求出其積數者，謂之過大數加乘法。

(二)算則：

(1)現假設有實數 A 數其過大實數為 D 數，過大實數與實數之差數為 H 數，亦即 $(D - A) = H$ ，法數之首位為 10^n ，法數之次位以下位數為 S 數，則

(實數) $A = [D - (D - A)]$ ，(法數) $B = 10^n + S$

$\therefore AB = 10^n D + DS - 10^n (D - A) - S (D - A)$

$= 10^n D + DS - S (D - A) - 10^n (D - A)$

$= 10^n D + DS - HS - 10^n H$

珠算的過大數加乘法計算，即應用上述之數學原理，逐項而計算的。茲將它應用情形及過程敘述如下： $10^n D$ 即為過大實數，首先布數於盤面，而且為法數之首位 (10^n) 倍數，計算時，過大實數 D 與法數之次位數以下位數 S 相乘，其乘積 DS 加於過大實數上面，此時盤面形成 $10^n D + DS$ ，其次過大實數與實數之差 H 與法數之次位數以下位數 S 相乘，由盤面 $10^n D + DS$ 減去其乘積 HS，因最先布數於盤面者係 $10^n D$ ，故尚需減去過大實數與實數之差 H，亦即 $10^n H$ ，而求出所需要之積數。

(2)定位法：過大實數位數 + 假法數位數 = 盤面定位位數 (整數情況)。

㊦過大數加乘法之計算順序：

(1)將法數之首位數 1 省略，其次位以下位數作為假法數。

(2)將實數改為過大實數置於盤面中央 (若有定位，則依定位位數)，假法數置於盤面左邊。

(3)計算時，首先由過大實數與假法數之首位數相乘，次位數相乘……都將其乘積加於盤面。

注意：①若遇到假法數首位係空位零時，則以過大實數右邊一檔為拾位檔，而加其乘積。

②假法數首位係有效數字，但與過大實數相乘，其乘積不滿拾位數，則以過大實數為拾位檔，右邊一檔為個位檔加其乘積。(此情況應從右邊一檔加其乘積)

③假法數首位係有效數字，但與過大實數相乘，其乘積滿拾位數，則以過大實數為拾位檔加其乘積。(註：本法計算都不可將過大實數撥去)

④與假法數次位數相乘……都比照上述原則計算，茲不再贅述。

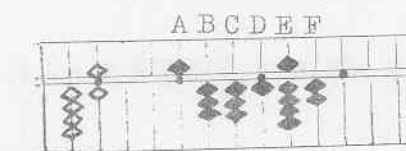
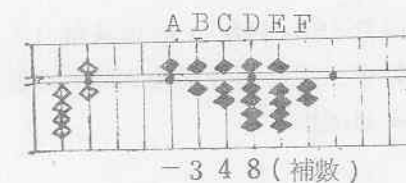
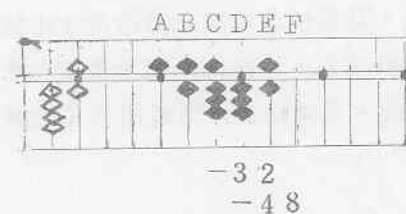
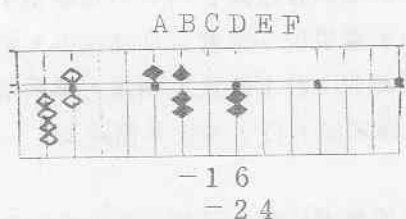
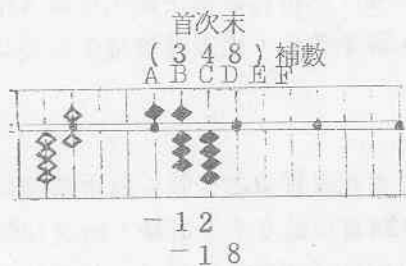
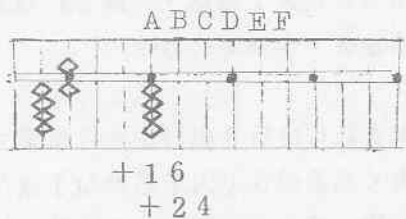
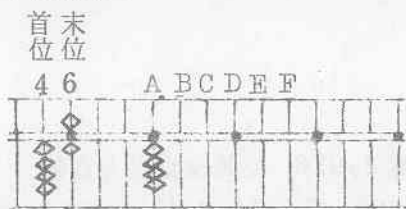
(4)其次過大實數與實數之差數 (亦即補數) 的首位與假法數首位相乘 (若假法數首位係有效數字時)，其乘積滿拾位數則由本檔減去；若不滿拾位數則退右一檔減。但若假法數首位係空位零時，則以本檔退右一檔為拾位檔減其乘積，然後再與假法數次位數相乘，按上述原則減其乘積，如此計算至差數 (補數) 的末位與假法數各位數相乘完，並逐次減其乘積為止。

(5)最後，由盤面積數減去過大實數與實數之差數 (補數)，即為所求之答數。

四舉實例計算說明：

<例一> $3,652 \times 146 = 533,192$

(假法數)



實數 3,652 將其改爲過大實數

4,000 置於盤面中央，其次將法數 146 之首位數 1 省略，其餘 46 置於盤面左邊，作爲假法數。

過大實數首位數 4 與假法數首位數 4 相乘，其乘積 16 加於 A B 檔，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 24 加於 B C 檔。

過大實數與實數之差數（以下稱補數）348 首位數 3 與假法數首位數 4 相乘，其乘積 12 由盤面 B C 檔減去，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 18 從 C D 檔減去。

其次補數次位數 4 與假法數首位數 4 相乘，其乘積 16 由盤面 C D 檔減去，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 24 從 D E 檔減去。

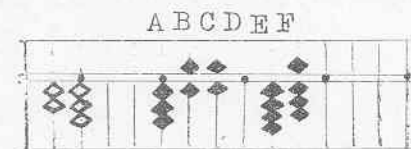
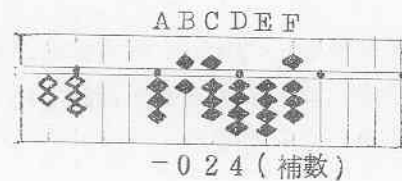
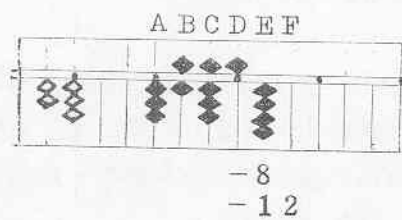
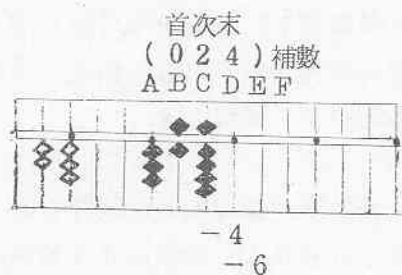
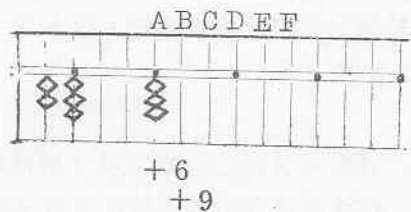
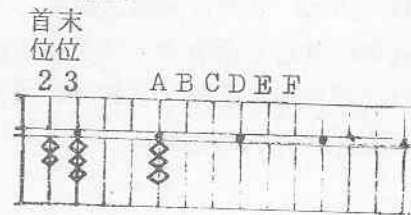
補數末位數 8 與假法數首位數 4 相乘，其乘積 32 由盤面 D E 檔減去，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 48 從 E F 檔減去。

盤面積數 567,992，但因係利用過大實數計算，故尚需減去補數 348，由盤面 B C D 檔減掉。

得積數 533,192 即爲所要求之答數。

<例二> $2,976 \times 123 = 366,048$

(假法數)



實數 2,976 將其改為過大實數

3,000 置於盤面中央，其次將法數 123 之首位數 1 省略，其餘 23 置於盤面左邊，作為假法數。

過大實數首位數 3 與假法數首位數 2 相乘，其乘積 6 (因未滿拾位) 故加於 B 檔，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 9 (因未滿拾位) 加於 C 檔。

過大實數與實數之差數 (以下稱補數) 024 首位數 0 不必計算，由次位數 2 與假法數首位數 2 相乘，其乘積 4 (因未滿拾位) 由盤面 D 檔減去，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 6 (因未滿拾位) 故從 E 檔減去。

其次補數末位數 4 與假法時首位數 2 相乘，其乘積 8 (因未滿拾位) 由盤面 E 檔減去，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 12 從盤面 E F 檔減去。

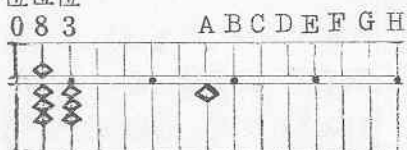
盤面積數 368,448，因係利用過大實數計算，故需減去補數 024，由盤面 C D 檔減掉。

得積數 366,048 即為所要求之答數。

<例三> $9,957 \times 1,083 = 10,783,431$

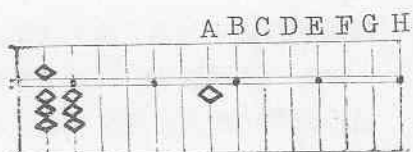
(假法數)

首次末
位位



實數 9,957 將其改爲過大實數

10,000 置於盤面中央，其次將法數 1,083 之首位數 1 省略，其餘 083 置於盤面左邊，作爲假法數。



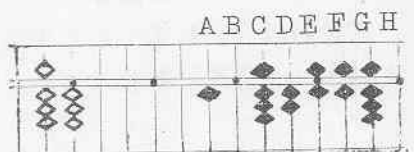
+8
+3

過大實數首位數 1 與假法數次位數 8 相乘 (因假法數首位數 0 不必計算)，其乘積 8 (因未滿拾位) 故加於 C 檔，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 3 (因未滿拾位) 加於 D 檔。



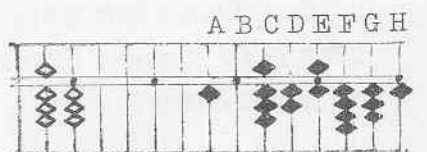
-32
-12

過大實數與實數之差數 (以下稱補數) 0043 首次位數 0 不必計算，由第三位數 4 與假法數次位數 8 相乘，其乘積 32 由盤面 E F 檔減去，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 12 從盤面 F G 檔減去。



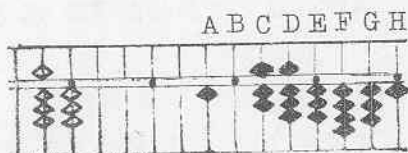
-24
-9

其次補數末位數 3 與假法數次位數 8 相乘，其乘積 24 由盤面 F G 檔減去，然後再與假法數末位數 3 相乘，得乘積 9 (因未滿拾位) 故由盤面 H 檔減去。



-0043 (補數)

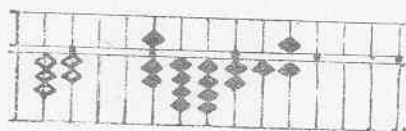
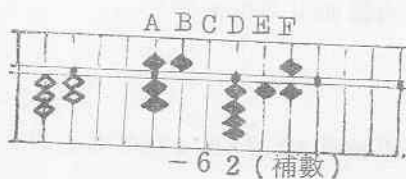
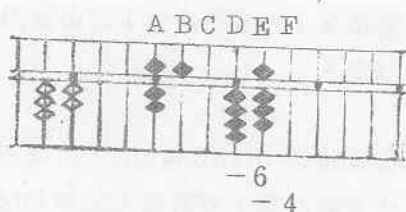
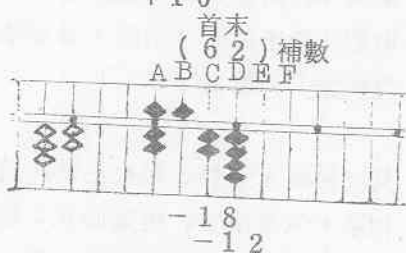
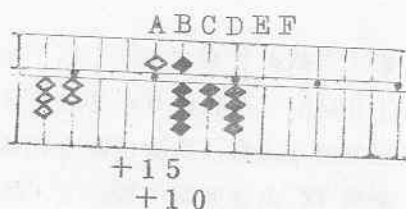
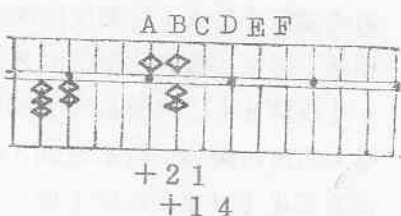
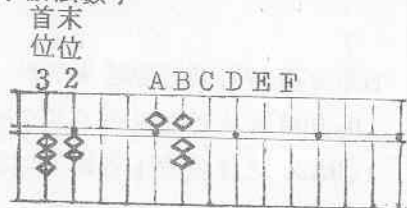
盤面積數 10,826,431，因係利用過大實數計算，故需減去補數 0043，由盤面 D E 檔減掉。



得積數 10,783,431 即爲所要求之答數。

<例四> $5,638 \times 132 = 744,216$

(假法數)



實數 5,638 將其改為過大實數

5,700 置於盤面中央，其次將法數 132 之首位數 1 省略，其餘 32 置於盤面左邊，作為假法數。

由過大實數末位數 7 與假法數首位數 3 相乘，其乘積 21 加於 B C 檔，然後再與假法數末位數 2 相乘，得乘積 14 加於 C D 檔。

其次過大實數首位數 5 與假法數首位數 3 相乘，其乘積 15 加於 A B 檔，然後再與假法數末位數 2 相乘，得乘積 10 加於 B C 檔。

過大實數與實數之差數（以下稱補數）62 首位數 6 與假法數首位數 3 相乘，其乘積 18 由盤面 C D 檔減去，然後再與假法數末位數 2 相乘，得乘積 12 由盤面 D E 檔減去。

再者，補數末位數 2 與假法數首位數 3 相乘，其乘積 6（因未滿拾位）故由盤面 E 檔減去，然後再與假法數末位數 2 相乘，得乘積 4（亦因未滿拾位）由盤面 F 檔減去。

盤面積數 750,416，因係利用過大實數計算，故需減去補數 62 由盤面 C D 檔減掉。

得積數 744,216 即為所要求答數。

肆、過大數減乘法之計算

(一)定義：利用過大實數以及過大實數與實數之差數，而以減乘法的方法計算求出其積數者，謂之過大數減乘法。

(二)算則：

(1)現假設有實數A數其過大實數為D數，過大實數與實數之差數為H數，亦即 $(D - A) = H$ ，法數對 10^n 之補數為S數，則

(實數) $A = [D - (D - A)]$ ，(法數) $B = 10^n - S$

$\therefore AB = 10^n D - DS - 10^n(D - A) + S(D - A)$

$= 10^n D - DS + S(D - A) - 10^n(D - A)$

$= 10^n D - DS + HS - 10^n H$

珠算的過大數減乘法計算，即應用上述之數學原理，逐項而計算的。茲將它應用情形及過程敘述如下： $10^n D$ 即為過大實數，首先布數於盤面，而且為 10^n 之倍數，計算時，過大實數D與法數之補數S相乘，其乘積DS由盤面 $10^n D$ 減去，此時盤面形成 $10^n D - DS$ 之數，其次過大實數與實數之差數H與法數之補數S相乘，其乘積HS加於盤面，而形成 $10^n D - DS + HS$ ，因最先布數於盤面者係 $10^n D$ ，故尚需減去過大實數與實數之差數H，亦即 $10^n H$ ，而求出所需要之積數。

(2)定位法：過大實數位數+法數位數=盤面定位位數（整數情況）。

(三)過大數減乘法之計算順序：

(1)先將法數改成其對 10^n 之補數，而作為假法數。

(2)將實數改為過大實數置於盤面中央（若有定位，則依定位位數），假法數置於盤面左邊。

(3)計算時，首先由過大實數與假法數之首位（有效數字）相乘，次位相乘……都由盤面減其乘積。

注意：①若遇到假法數首位係空位零時，則以過大實數右邊一檔為拾位檔，而減其乘積。

②假法數首位係有效數字，但與過大實數相乘，其乘積不滿拾位數，則以過大實數為拾位檔，右邊一檔為個位檔減其乘積。（此情況應從右邊一檔減其乘積。

③假法數首位係有效數字，但與過大實數相乘，其乘積滿拾位數，則以過大實數為拾位檔減其乘積。（註：本法計算都不可將過大實數撥去）

④與假法數次位數相乘……都比照上述原則計算，茲不再贅述。

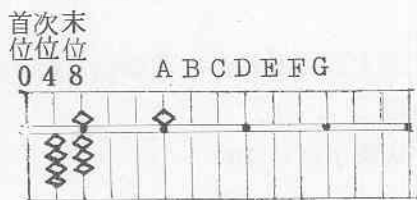
(4)其次過大實數與實數之差數（亦即補數）的首位與假法數首位相乘（若假法數首位係空位零時），其乘積滿拾位數則以本檔退右一檔為拾位檔加其乘積，不滿拾位數則退右二檔加其乘積，至於若假法數首位係有效數字時，則以本檔為拾位檔，退右一檔為個位檔加其乘積，然後再與假法數次位相乘，按上述原則加其乘積，如此計算至差數（補數）的末位與假法數各位數相乘完，並逐次加其乘積為止。

(5)最後，由盤面積數減去過大實數與實數之差數（補數），即為所求之答數。

四舉實例計算說明：

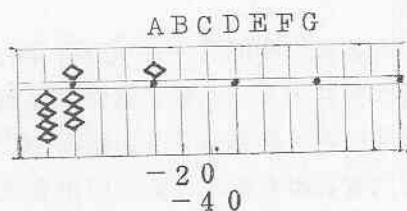
<例一> $4,533 \times 952 = 4,315,416$

（假法數）

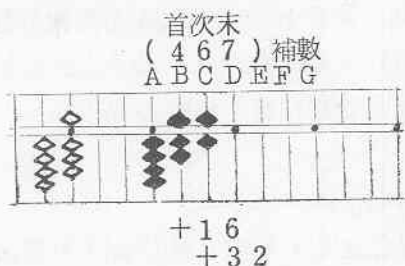


實數 4,533 將其改為過大實數

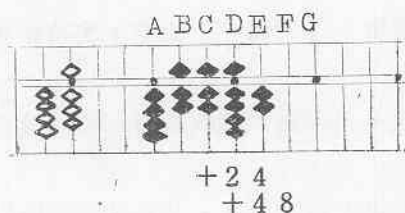
5,000並置於盤面中央，法數 952 對於 10^3 其補數 048 作為假法數置於盤面左邊。



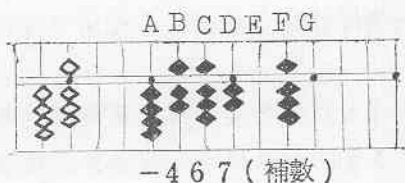
過大實數首位數 5 與假法數次位數 4 相乘（因假法數首位係 0 不必計算），其乘積 20 由盤面 B C 檔減去，然後再與假法數末位數 8 相乘，得乘積 40 由盤面 C D 檔減去。



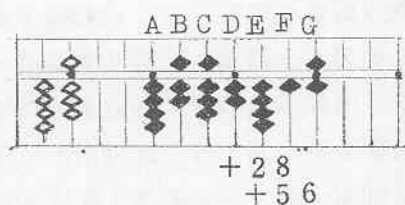
過大實數與實數之差數（以下稱補數）467 首位數 4 與假法數次位數 4 相乘，其乘積 16 加於盤面 C D 檔，然後再與假法數末位數 8 相乘，得乘積 32 加於 D E 檔。



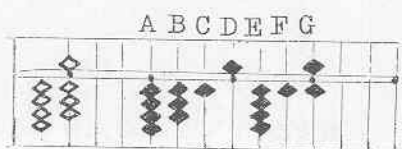
其次補數次位數 6 與假法數次位數 4 相乘，其乘積 24 加於盤面 D E 檔，然後再與假法數末位數 8 相乘，得乘積 48 加於 E F 檔。



補數末位數 7 與假法數次位數 4 相乘，其乘積 28 加於盤面 E F 檔，然後再與假法數末位數 8 相乘，得乘積 56 加於 F G 檔。

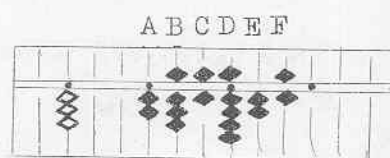
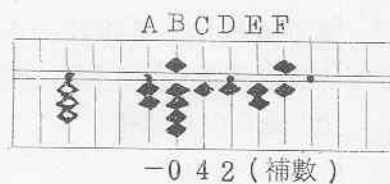
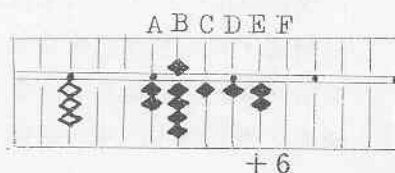
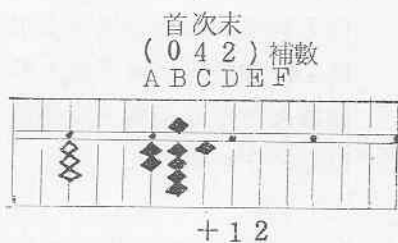
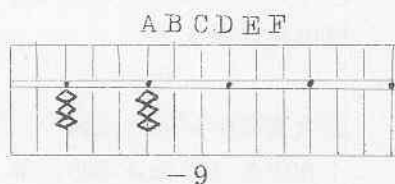
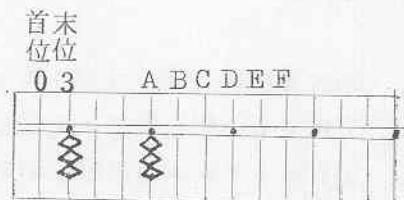


盤面積數 4,782,416 但因係利用過大實數計算，故尚需減去補數 467，由盤面 B C D 檔減掉。



<例二> $2,958 \times 97 = 286,926$

(假法數)



得積數 4,315,416 即係所要求之答案。

實數 2,958 將其改為過大實數 3,000 並置於盤面中央，法數 97 對於 10^2 其補數 03 作為假法數置於盤面左邊。

過大實數首位數 3 與假法數末位數 3 相乘（因假法數首位係 0 不必計算），其乘積 9（因未滿拾位）故由盤面 C 檔減去。

過大實數與實數之差數（以下稱補數）042 首位數 0 不必計算，由次位數 4 與假法數末位數 3 相乘，其乘積 12 加於盤面 D E 檔。

其次補數末位數 2 與假法數末位數 3 相乘，其乘積 6（因未滿拾位）故加於盤面 F 檔。

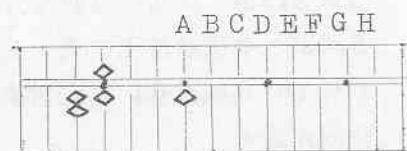
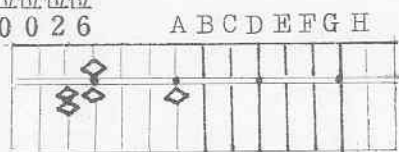
盤面積數 291,126，因係利用過大實數計算，故需減去補數 042，由盤面 C D 檔減掉。

得積數 286,926 即為所要求之答案。

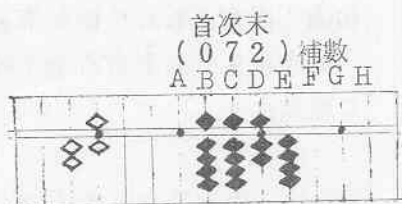
<例三> $928 \times 9,974 = 9,255,872$

(假法數)

首次末
位位位
0 0 2 6

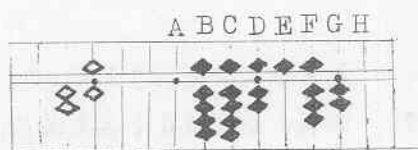


- 2
- 6

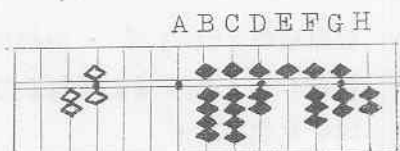


首次末
(0 7 2) 補數
A B C D E F G H

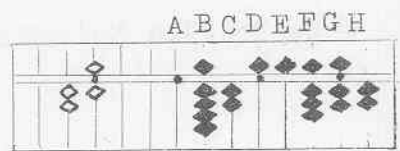
+ 1 4
+ 4 2



+ 4
+ 1 2



- 0 7 2 (補數)



實數 928 將其改爲過大實數 1,000

並置於盤面中央，法數 9,974 對於 10^4 其補數 0026 作爲假法數置於盤面左邊。

過大實數首位數 1 與假法數第三位數 2 相乘 (因假法數首、次位皆係 0 不必計算)，其乘積 2 因未滿拾位故由盤面 D 檔減去，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 6 亦因未滿拾位由盤面 E 檔減去。

過大實數與實數之差數 (以下稱補數) 072 首位數係 0 不必計算，由次位數 7 與假法數第三位數 2 相乘，其乘積 14 加於盤面 E F 檔，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 42 加於盤面 F G 檔。

其次補數末位數 2 與假法數第三位數 2 相乘，其乘積 4 因未滿拾位故加於盤面 G 檔，然後再與假法數末位數 6 相乘，得乘積 12 加於盤面 G H 檔。

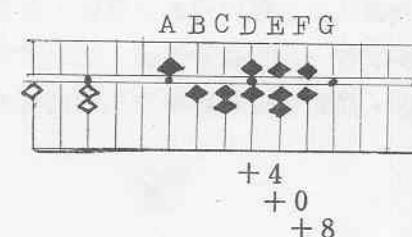
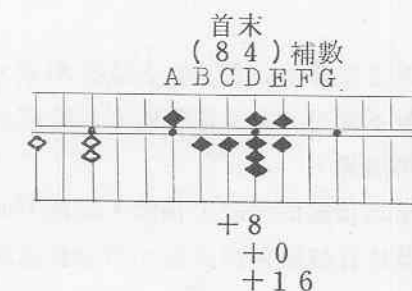
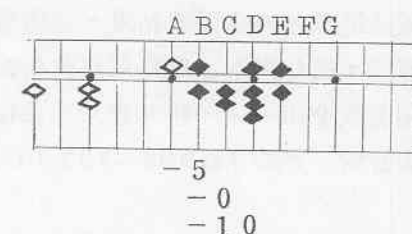
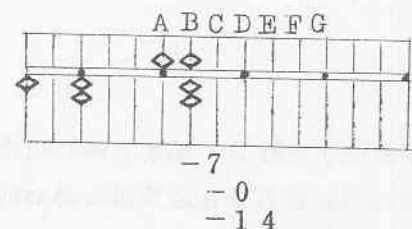
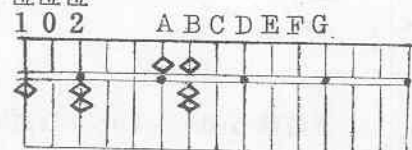
盤面積數 9,975,872，因係利用過大實數計算，故尚需減去補數 072，由盤面 C D 檔減掉。

得積數 9,255,872 即係所要求之答案。

<例四> $5,616 \times 898 = 5,043,168$

(假法數)

首次末
位位位



實數 5,616 將其改為過大實數

5,700 並置於盤面中央，法數 898

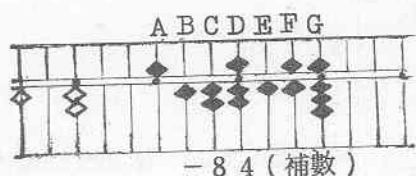
對於 10^3 其補數 102 作為假法數置於盤面左邊。

過大實數末位數 7 與假法數首位數 1 相乘，其乘積 7 因未滿拾位故由盤面 C 檔減去，然後再與假法數末位數 2 相乘（因假法數之次位數係 0 不必計算），得乘積 14 由盤面 D E 檔減去。

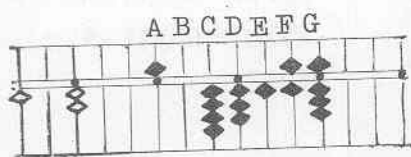
其次過大實數首位數 5 與假法數首位數 1 相乘，其乘積 5 因未滿拾位故由盤面 B 檔減去，然後再與假法數末位數 2 相乘（因假法數之次位數係 0 不必計算），得乘積 10 由盤面 C D 檔減去。

過大實數與實數之差數（以下稱補數）84 首位數 8 與假法數首位數 1 相乘，其乘積 8 因未滿拾位故加於盤面 D 檔，然後再與假法數末位數 2 相乘（因假法數之次位數係 0 不必計算），得乘積 16 加於盤面 E F 檔。

再者，補數末位數 4 與假法數首位數 1 相乘，其乘積 4 因未滿拾位故加於盤面 E 檔，然後再與假法數末位數 2 相乘（因假法數之次位數係 0 不必計算），得乘積 8 加於盤面 G 檔。



盤面積數 5,127,168，因係利用過大實數計算，故尚需減去補數 84，從盤面 C D 檔減掉。



得積數 5,043,168 即為所求之答數。

伍、結 論

過大數加乘法及過大數減乘法（以下簡稱本法）之計算，基本上係利用珠算特有之原理（例如 $3 = +5 - 2$ ），再配以加乘法及減乘法各其特有之要領計算而成的。經過幾個例題的計算，我們可以發現本法具有下列之利弊：

優點：(一)一般加乘法之計算若遇到假法假首位係有效數字而且較大時（例如 9 或 8），

實數之數字亦偏大時，如此兩數相乘將積數加於盤面的結果，必然會將其積數累進到尚未相乘的實數上面而很易算錯，但採用本法計算則無此憂慮。

(二)將實數改為過大實數而計算，若遇到實數 999……時計算更為便捷。

(三)本法可視實際狀況將實數調整為過大實數。例如 $34,998 \Rightarrow 35,000$ ；又如 $9997 \Rightarrow 10,000$ 。

(四)本法仍可應用於百分法計算中，由母數、百分率求出母子和；以及由母數、百分率求出母子差之計算方面上。

缺點：(一)本法係利用補數（即過大實數與實數之差數）與假法數各位數相乘，而其乘積是加於盤面或從盤面減掉呢？甚易弄不清楚，尤其是從盤面何檔開始計算稍疏忽即易計算錯，故需經一番練習始可熟悉。

(二)因係利用過大實數而計算，故所求出之積數尚需減去補數，這點方面甚易被計算者遺忘疏忽，以及若是要減掉應該是從盤面何檔減去，需要甚注意檔位問題，否則易減錯。

(三)對於尚未學習過加乘法及減乘法之計算者較不易學習。

筆者之提出此一計算研究，其目的並非強調此法具有如何的優異性，而係在說明(1)可以不同計算方法達到目的——答案。藉以多學習一些特殊計算法。(2)更重要在引證數學與珠算計算之關係。以上若有謬見粗疏之處，尚祈各位珠算學界先輩隨時指正，實所企盼。